Problemario de dinámica

José Angel Rocha Martínez
Héctor Martín Luna García
Miguel Tufiño Velázquez

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

Problemario de dinámica

José Angel Rocha Martínez
Héctor Martín Luna García
Miguel Tufiño Velázquez

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco
División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Ciencias Básicas

ISBN: 970-654-581-6

Corrección:
Marisela Juárez Capistrán
Ilustración de portada:
Consuelo Quiroz Reyes
Diseño de Portada:
Modesto Serrano Ramírez

Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco
Av. San Pablo 180
Col. Reynosa Tamaulipas
Delegación Azcapotzalco
C.P. 02200
México, D.F.

Sección de producción
y distribución editoriales
Tel. 5318-9222/9223
Fax. 5318-9222

1a. edición, 1991
2a. edición, 2000
5a. reimpresión, 2003

Impreso en México.

ÍNDICE

P R E S E N T A C I Ó N

El presente trabajo es la recopilación de las experiencias de los profesores del Área de Física, en la impartición de la Unidad de Enseñanza Aprendizaje "Dinámica", durante un tiempo considerable (no menor de cuatro años).

Los propósitos de este trabajo son:

. Proporcionar a los alumnos una guía rápida y completa sobre el contenido de la U.E.A.

. Ayudar al profesor en la impartición de la U.E.A., particularmente en la realización de ejercicios y problemas de la misma.

. Uniformar el contenido de la U.E.A. y por tanto el aprendizaje de los alumnos de los diferentes grupos de dicha U.E.A.

. Auxiliar a los alumnos en su preparación para presentar las evaluaciones tanto parciales como globales o de recuperación de Dinámica.

Para lo cual, el trabajo está integrado de acuerdo con las Unidades del Programa Oficial de la U.E.A., y en cada una se incluye un resumen del contenido de la unidad y una selección de problemas con sus soluciones.

Diciembre de 1986.

1. RESUMEN DE LA UNIDAD I. DINÁMICA DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

1.1 CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS:

Definición: Momento lineal de una partícula.

Si respecto de un S.R.* dado, la velocidad de una partícula de masa m es $\vec{v} = \vec{v}\,(t)$, se define el momento lineal, o vector cantidad de movimiento de m, al tiempo t, como:

$$\vec{P} \equiv m\vec{v}$$

Observación: Segunda Ley de Newton para una partícula.

"Si sobre una partícula actúa una fuerza neta $\vec{F}$, se cumple que

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$$

Donde $\vec{P}$ es el momento lineal de la partícula al tiempo t, respecto de un S.R. inercial".

Definición: Momento lineal de un sistema de partículas.

Si al tiempo t, los momentos lineales de n partículas son $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots \vec{p}_n$, se define el momento lineal $\vec{P}$ del sistema, al tiempo t, como:

$$\vec{P} \equiv \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots \vec{p}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i$$

Observación: Ecuación de movimiento de un sistema de partículas.

"Si n partículas se mueven respecto de un S.R. inercial de

* S.R.: Sistema de Referencia.

tal forma que sobre ellas actúan las fuerzas siguientes:

$\vec{F}_i$ es la fuerza externa que actúa sobre m_i.

$\vec{F}_{ki}$ es la fuerza interna que m_k ejerce sobre m_i.

Entonces se cumple que:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{int}$$

Donde: $\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i$ es el momento lineal del sistema,

$\vec{F}_{ext} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ es la fuerza total externa que actúa sobre el sistema, y $\vec{F}_{int} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ i \neq k}}^{n} \vec{F}_{ki}$ es la fuerza total que actúa sobre el sistema".

Caso particular:

Si las fuerzas internas cumplen con la 3a. Ley Newton, se tiene:

$$\vec{F}_{ki} = -\vec{F}_{ik}, \text{ para } k,i = 1, 2, \ldots, n, \text{ con } k \neq i$$

por lo tanto: $\vec{F}_{int} = \vec{0}$ y entonces:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ext}$$

Definición: <u>Centro de masa</u>.

Si respecto de un S.R. dado, las posiciones de n partículas $m_1, m_2, \ldots, m_n$ son $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n$ al tiempo t, se define la posición del centro de masa (C.M.) del sistema como:

$$\vec{r}_{cm} \equiv \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i$$

Observación: Algunas propiedades geométricas del C.M.

i) El C.M. de un sistema de dos partículas m_1 y m_2 es un punto de la recta que pasa por las dos partículas, y está colocado en el segmento de recta que las une.

ii) La distancia del C.M. a las partículas es inversamente proporcional al valor de las masas.

iii) La posición del C.M. de dos sistemas de k y n partículas respectivamente, está dada por:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{M_k \vec{r}_{cm}(k) + M_n \vec{r}_{cm}(n)}{M_k + M_n}$$

donde:

$$\vec{r}_{cm}(k) = \frac{1}{M_k} \sum_{i=1}^{k} m_i \vec{r}_i \qquad \text{con} \quad M_k = \sum_{i=1}^{k} m_i$$

y:

$$\vec{r}_{cm}(n) = \frac{1}{M_n} \sum_{j=i}^{k} m_j \vec{r}_j \qquad \text{con} \quad M_n = \sum_{j=1}^{k} m_j$$

<u>Significado físico del C.M.</u>

Para un sistema de n partículas se tiene:

$$\vec{P} = M\vec{v}_{cm}$$

Por lo tanto:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = M\vec{a}_{cm} = \vec{F}_{ext}$$

Observación: El C.M. se comporta como si toda la masa del sistema de partículas estuviera concentrada en dicha posición, actuando sobre él todas las fuerzas que actúan sobre el sistema de partículas. De lo anterior, se dice que el C.M. describe la parte traslacional del movimiento del sistema de partículas.

Caso particular: Conservación del momento lineal.

Si el sistema está aislado, $\vec{F}_{ext} = 0$ y entonces:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} \ \text{y} \ \vec{P} = \text{CTE} \quad \text{ó} \quad \vec{a}_{cm} = \vec{0} \ \text{y} \ \vec{v}_{cm} = \text{CTE}$$

Ejemplo: Choque de dos partículas aisladas.

En el choque se conserva el momento lineal total.

a) Choques elásticos en una dimensión.

Definición: Un choque elástico es aquel en que se conserva la energía cinética total.

De la conservación del momento lineal y de la energía cinética (ver Fig. 1) se tiene:

$$\vec{v}_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\,\vec{v}_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\,\vec{v}_{2i} \qquad \overrightarrow{\vec{v}_{1i} - \vec{v}_{2i}} = \overrightarrow{\vec{v}_{2f} - \vec{v}_{1f}}$$

$$\vec{v}_{1f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\,\vec{v}_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\,\vec{v}_{2i}$$

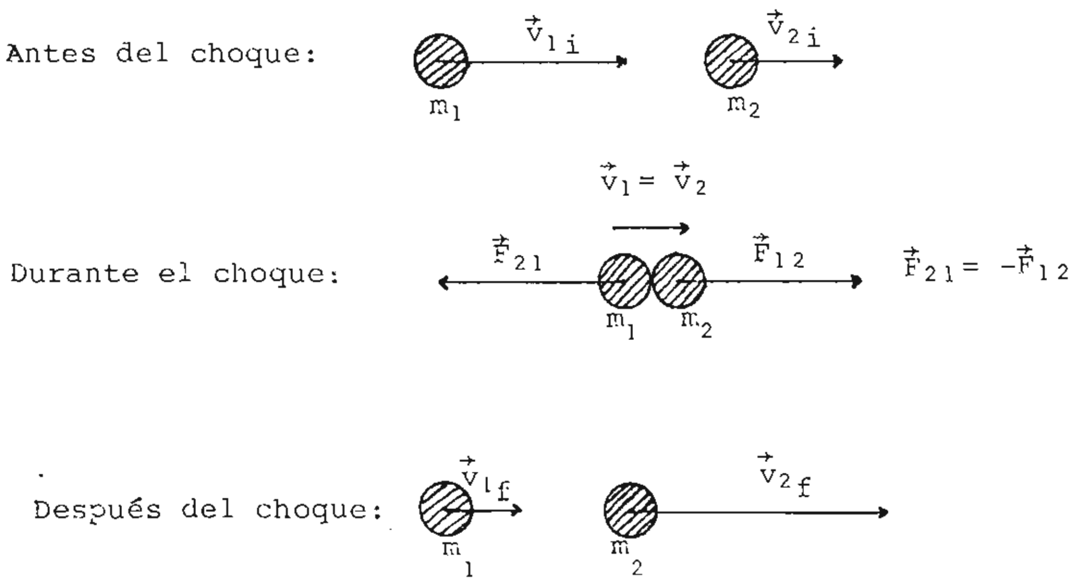


Fig. 1

b) Choques inelásticos.

Definición: Un choque inelástico es aquel en que no se conserva la energía cinética total.

Caso de interés: Choque completamente inelástico.

Definición: Un choque completamente inelástico es aquel en que las partículas se mueven juntas después de la colisión.

De la conservación del momento lineal (ver Fig. 2) se tiene:

$$\vec{v}_f = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_{1i} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_{2i}$$

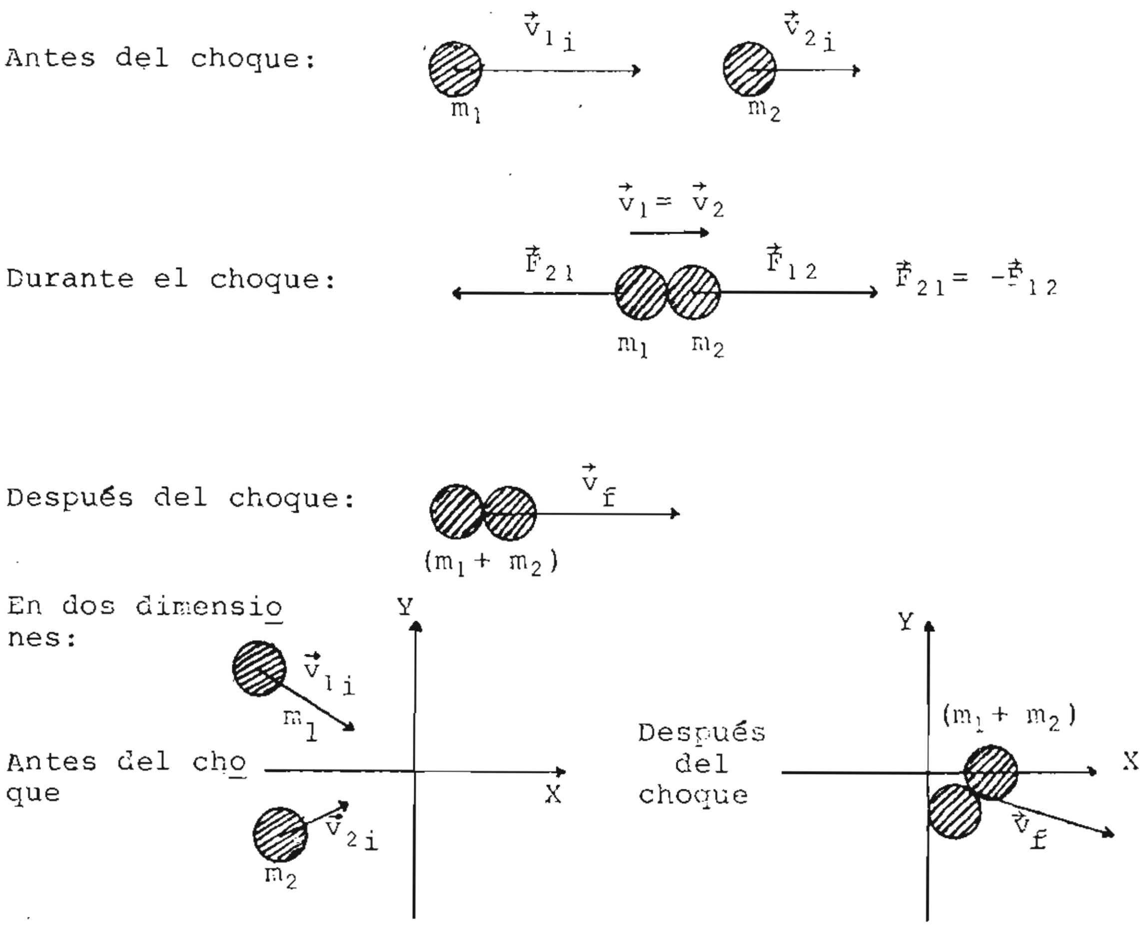


Fig. 2

1.2 CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

Definición: Momento angular de una partícula.

Si respecto de un S.R. "O" dado, la posición y el momento lineal de una partícula m son $\vec{r}$ y $\vec{p}$ al tiempo t, se define el momento angular $\vec{\ell}$ de m, respecto a "O" al tiempo t, como:

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Es decir: $\vec{\ell} \perp \vec{r}$, $\vec{\ell} \perp \vec{p}$ y $\ell = rp \operatorname{sen} \theta$

y el sentido de $\vec{\ell}$ está dado por la regla de la mano derecha (ver Fig. 3).

Definición: Momento de una fuerza o Torca.

Si sobre m actúa la fuerza $\vec{F}$, se define la torca $\vec{\tau}$ que actúa sobre m, respecto de "O" como:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Es decir $\vec{\tau} \perp \vec{r}$, $\vec{\tau} \perp \vec{F}$ y $\tau = rF \operatorname{sen} \theta$, y el sentido de $\vec{\tau}$ está dado por la regla de la mano derecha (ver Fig. 4).

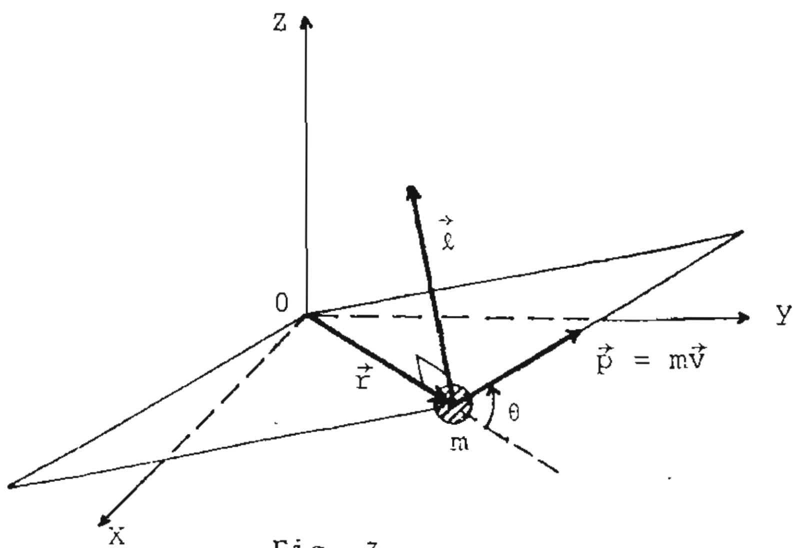


Fig. 3

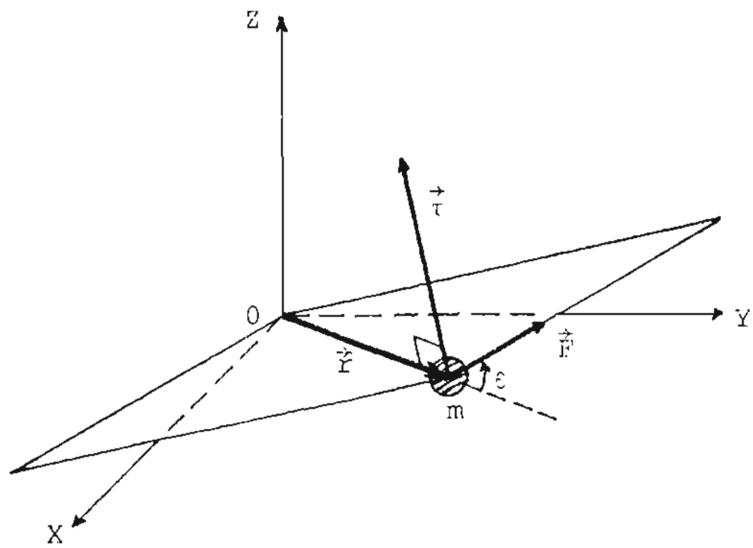


Fig. 4

Observación: Segunda Ley de Newton para una partícula, en términos de los vectores momento angular y torca.

Si respecto de un S.R. inercial "O" el momento angular de una partícula m es $\vec{\ell}$ y sobre ella actúa una torca $\vec{\tau}$, respecto de "O", se tiene que:

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{\tau}$$

Definición: <u>Momento angular de un sistema de partículas</u>.

Si respecto de un S.R. "O" dado el momento angular de n partículas son: $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \ldots, \vec{\ell}_n$, se define el momento angular total del sistema, respecto de "O", como:

$$\vec{L} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \ldots \vec{\ell}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{\ell}_i$$

Observación: Ecuación de movimiento del sistema de partícu las en términos del momento angular.

Si el sistema de partículas está sometido a la acción de las siguientes fuerzas:

$\vec{F}_i$ es la fuerza externa que actúa sobre m_i,

$\vec{F}_{ki}$ es la fuerza interna que m_k ejerce a m_i,

con $i,k = 1, 2, \ldots, n$, $i \neq k$

entonces:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_{ext} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ki}$$

donde:

$$\vec{\tau}_{ext} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Caso particular:

Si las fuerzas internas cumplen el "enunciado fuerte" de la 3a. Ley de Newton, es decir, si:

$\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$ y $\vec{F}_{ik} \parallel (\vec{r}_i - \vec{r}_k) \parallel \vec{F}_{ki}$,

entonces:

$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ki} = \vec{0}$, y por lo tanto:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_{ext}$$

Caso particular:

Conservación del momento angular en un sistema de partículas.

Si un sistema de partículas se encuentra libre de torcas externas, es decir:

$$\vec{\tau}_{ext} = \vec{0}$$

Entonces: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$ ó $\vec{L} = CTE$

1.3 DESCRIPCION DINÁMICA DEL MOVIMIENTO DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

La descripción del movimiento de un sistema de partículas, respecto de un S.R. inercial "O", se efectúa de acuerdo a las siguientes etapas:

i) Descripción del movimiento del C.M. respecto de "O".

ii) Descripción del movimiento del sistema de partículas respecto de un S.R. colocado en el C.M.

iii) Uso de las relaciones de transformación de los diferentes parámetros dinámicos respecto de "O" y del S.R. del C.M.

i) <u>Movimiento del C.M. respecto de "O".</u>

El C.M. se mueve con aceleración $\vec{a}_{cm}$ dada por:

$$\vec{a}_{cm} = \frac{\vec{F}_{ext}}{M}$$

De tal forma que su velocidad y posición se pueden obtener como:

$$\vec{v}_{cm}(t) = \vec{v}_{cmo} + \int_0^t \vec{a}_{cm}\, dt$$

y: $$\vec{r}_{cm}(t) = \vec{r}_{cmo} + \int_0^t \vec{v}_{cm}(t)\,dt = \vec{r}_{cmo} + \vec{v}_{cmo}\,t + \int_0^t \left[\int_0^t \vec{a}_{cm}\, dt \right] dt$$

Donde: $\vec{v}_{cmo} = \vec{v}_{cm}(t=0)$ y $\vec{r}_{cmo} = \vec{r}_{cm}(t=0)$

ii) Movimiento de un sistema de partículas respecto de un S.R. colocado en el C.M.

a) Posición de las partículas:

$$\vec{r}\,'_i = \frac{1}{M} \sum_{\substack{k=1 \\ i \neq k}}^{n} m_k(\vec{r}_i - \vec{r}_k)$$

b) Velocidad de las partículas:

$$\vec{v}\,'_i = \frac{1}{M} \sum_{\substack{k=1 \\ i \neq k}}^{n} m_k(\vec{v}_i - \vec{v}_k)$$

c) Momento lineal de las partículas y momento total:

$$\vec{p}\,'_i = m_i \vec{v}\,'_i = \frac{m_i}{M} \sum_{k=1}^{n} m_k(\vec{v}_i - \vec{v}_k)$$

$$\vec{P}\,' = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}\,'_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ i \neq k}}^{n} m_i m_k(\vec{v}_i - \vec{v}_k) = \vec{0}$$

d) Momento angular de las partículas y momento angular total:

$$\vec{\ell}\,'_i = \vec{r}\,'_i \times \vec{p}\,'_i = \vec{r}\,'_i \times (m_i \vec{v}\,'_i)$$

$$= \frac{m_i}{M^2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ i \neq j,\, i \neq k}}^{n} m_j m_k(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times (\vec{v}_i - \vec{v}_k)$$

$$\vec{L}\,' = \sum_{i=1}^{n} \vec{\ell}\,'_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ i \neq j,\, i \neq k}}^{n} m_i m_j m_k(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times (\vec{v}_i - \vec{v}_k)$$

e) Torca actuando sobre cada partícula y torca total:

$$\vec{\tau}_i' = \vec{r}_i' \times \vec{F}_i' = \vec{r}_i' \times (\vec{m}_i \vec{a}_i')$$

$$= \frac{m_i}{M^2} \sum_{\substack{j=i \\ i\neq j,\, i\neq k}}^{n} \sum_{k=i}^{n} m_j m_k (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times (\vec{a}_i - \vec{a}_k)$$

donde: $\vec{a}_i = \frac{\vec{F}_i}{m_i}$ y $\vec{a}_k = \frac{\vec{F}_k}{m_k}$

$$\vec{\tau}' = \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_i' = \frac{1}{M^2} \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j,\, i\neq k}}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} m_i m_j m_k (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times (\vec{a}_i - \vec{a}_k)$$

f) Energía cinética de las partículas y energía cinética total.

$$k' = \frac{1}{2} m_i v_i'^2 = \frac{1}{2} \frac{m_i}{M^2} \sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ i\neq k}}^{n} m_j m_k (\vec{v}_i - \vec{v}_j) \cdot (\vec{v}_i - \vec{v}_k)$$

$$K' = \sum_{i=1}^{n} k_i' = \frac{1}{2M} \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j,\, i\neq k}}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} m_i m_j m_k (\vec{v}_i - \vec{v}_j) \cdot (\vec{v}_i - \vec{v}_k)$$

g) Ecuación de movimiento:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}'_{ext}, \qquad \text{donde} \quad \vec{\tau}'_{ext} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_i'$$

h) Conservación del momento angular.

Respecto del C.M., el momento angular total se conserva, es decir:

$$\vec{L}' = CTE$$

si las fuerzas externas $\vec{F}_i$ son tales que:

$$\frac{\vec{F}_i}{m_i} = CTE$$

Caso de interés: Para dos partículas:

a') Posición de las partículas.

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}(-\vec{r}_{12}) \quad ; \quad \vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}_{12}$$

donde: $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2-\vec{r}_1$

b') Velocidad de las partículas.

$$\vec{v}_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}(-\vec{v}_{12}) \quad ; \quad \vec{v}_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_{12}$$

donde: $\vec{v}_{12} = \vec{v}_2-\vec{v}_1$

c') Momento lineal de las partículas y momento total.

$$\vec{p}_1' = m_1'\vec{v}_1' = -\mu\vec{v}_{12} \quad ; \quad \vec{p}_2' = m_2\vec{v}_2' = \mu\vec{v}_{12}$$

donde: $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$ ó $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$

es la masa reducida.

$$P' = p_1' + p_2' = \vec{0}$$

d') Momento angular de las partículas y momento angular total.

$$\vec{\ell}_1' = \vec{r}_1' \times \vec{p}_1' = \frac{m_2}{m_1+m_2}\, \vec{r}_{12} \times \mu\vec{v}_{12}$$

$$\vec{\ell}_2' = \vec{r}_2' \times \vec{p}_2' = \frac{m_1}{m_1+m_2}\, \vec{r}_{12} \times \mu\vec{v}_{12}$$

$$\vec{L}' = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 = \vec{r}_{12} \times (\mu\vec{v}_{12}) = \mu\vec{r}_{12} \times \vec{v}_{12}$$

e') Torca actuando sobre cada partícula y torca total.

$$\vec{\tau}_1' = \vec{r}_1' \times \vec{F}_1' = \frac{m_1 m_2^2}{(m_1+m_2)^2}\, \vec{r}_{12} \times \vec{a}_{12}$$

$$\vec{\tau}_2' = \vec{r}_2' \times \vec{F}_2' = \frac{m_2 m_1^2}{(m_1+m_2)^2}\, \vec{r}_{12} \times \vec{a}_{12}$$

donde: $\vec{a}_{12} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$ con $\vec{a}_2 = \dfrac{\vec{F}_2}{m_2}$ y $a_1 = \dfrac{\vec{F}_1}{m_1}$

$$\vec{\tau}' = \vec{\tau}_1' + \vec{\tau}_2' = \vec{r}_{12} \times (\mu\vec{a}_{12}) = \mu\vec{r}_{12} \times \vec{a}_{12}$$

f') Energía cinética de las partículas y energía cinética total.

$$k_1' = \frac{1}{2} = m_1 v_1'^2 = \frac{1}{2}\, \frac{m_1 m_2^2}{(m_1+m_2)^2}\, |\vec{v}_{12}|^2$$

$$k_2' = \frac{1}{2} = m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2}\, \frac{m_1^2 m_2}{(m_1+m_2)^2}\, |\vec{v}_{12}|^2$$

donde: $|\vec{v}_{12}|^2 = (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)\cdot(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = v_{12}^2$

$$K' = k_1' + k_2' = \frac{1}{2}\, \mu v_{12}^2$$

iii) Relaciones de transformación de los parámetros dinámicos respecto de "O" y respecto del C.M.

Los parámetros observados desde el C.M. se denotarán con una prima (') y respecto de "O", sin prima.

a) Posición de las partículas:

$\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{r}_{cm}$ ó $\vec{r}_i = \vec{r}_{cm} + \vec{r}_i'$

b) Velocidad de las partículas.

$\vec{v}_i' = \vec{v}_i - \vec{v}_{cm}$ ó $\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_i'$

c) Momento lineal de las partículas y momento total.

$\vec{p}_i' = \vec{p}_i - m_i\vec{v}_{cm}$ ó $\vec{p}_i = m_i\vec{v}_{cm} + \vec{p}_i'$

$\vec{P}' = \vec{P} - M\vec{v}_{cm}$ ó $\vec{P} = M\vec{v}_{cm} + \vec{P}'$

como $\vec{P} = M\vec{v}_{cm}$ entonces $\vec{P}' = 0$

d) Momento angular de las partículas y momento angular total:

$\vec{\ell}_i' = \vec{r}_i' \times \vec{p}_i' = (\vec{r}_i - \vec{r}_{cm}) \times (\vec{p}_i - m_i\vec{v}_{cm})$

$\vec{L}' = \vec{L} - \vec{L}_{cm}$ ó $\vec{L} = \vec{L}_{cm} + \vec{L}'$

donde: $\vec{L}_{cm} = \vec{r}_{cm} \times (M\vec{v}_{cm})$

e) Torca actuando sobre cada partícula y torca total

$\vec{\tau}_i' = \vec{r}_i' \times \vec{F}_i' = (\vec{r}_i - \vec{r}_{cm}) \times (\vec{F}_i - m_i\vec{a}_{cm})$

$\vec{\tau}' = \vec{\tau} - \vec{\tau}_{cm}$ ó $\vec{\tau} = \vec{\tau}_{cm} + \vec{\tau}'$

donde: $\vec{\tau}_{cm} = \vec{r}_{cm} \times \vec{F}_{ext}$

f) Energía cinética de las partículas y energía cinética total.

$$k_i' = \frac{1}{2} m_i v_i'^2 = \frac{1}{2} m_i |\vec{v}_i - \vec{v}_{cm}|^2$$

$$K' = K - K_{cm} \quad \text{ó} \quad K = K_{cm} + K'$$

donde: $K_{cm} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2$

1.4 ENERGÍA MECÁNICA DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

Definición: Estado de movimiento de un sistema de partículas.

Un estado de movimiento de un sistema de partículas es una configuración del sistema definida por la posición y velocidad de todas las partículas. Por ejemplo, entenderemos al estado A como:

$$A = \{\vec{r}_{iA}, \vec{v}_{iA}\} \quad i = 1,2\ldots n$$

Definición: Trabajo.

Si sobre cada partícula, cuya posición es $\vec{r}_i$, actúa la fuerza $\vec{F}^i$, se define el trabajo W_T (A→B), efectuado sobre el sistema cuando sufre el cambio de estado de A a B como:

$$W_T \ (A \to B) \equiv \sum_{i=1}^{n} \int_A^B F^i . d\vec{r}_i$$

donde: $A = \{\vec{r}_{iA}, \vec{v}_{iA}\}$, $B = \{\vec{r}_{iB}, \vec{v}_{iB}\}$

Definición: Energía Cinética.

Si la velocidad de las partículas, cuyas masas son m_1, m_2, ...m_n, son $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$,...$\vec{v}_n$, se define la energía cinética del sistema como:

$$K \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \ v_i^2$$

donde: $v_i = |\vec{v}_i|$

Observación: Teorema del trabajo y la energía cinética. Para un sistema de partículas se cumple:

$$W_T\ (A\to B) = K\ (B) - K\ (A) = [\Delta K]_{A\to B}$$

Observación: Se tiene que: $W_T\ (A\to B) = W_{int}(A\to B) + W_{ext}\ (A\to B)$

Donde: $W_{ext}\ (A\to B) = \sum_{i=1}^{n} \int_A^B \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i$

$$W_{int}(A\to B) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^{n} \int_A^B \vec{F}_{ki} \cdot d\vec{r}_{ik}$$

y: $\vec{r}_{ik} = \vec{r}_i - \vec{r}_k$ es la posición de m_i respecto de m_k.

Observación: Energía potencial, energía mecánica y conservación de la energía.

Si las fuerzas internas son conservativas, existen funciones escalares $U_{ik} = U_{ik}(\vec{r}_{ik})$ tal que;

$$W_{int}(A\to B) = -[U_{int}(B) - U_{int}(A)] = -[\Delta U_{int}]_{A\to B}$$

donde: $U_{int} \equiv \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i+1}^{n} U_{ik}$

es la energía potencial interna del sistema.

Entonces: $W_{ext}(A\to B) - [\Delta U_{int}]_{A\to B} = [\Delta K]_{A\to B}$

Luego: $[\Delta E_{int}]_{A\to B} = W_{ext}(A\to B)$

Donde: $E_{int} \equiv K + U_{int}$

es la energía interna del sistema.

Si el sistema es aislado se tiene:

$$[\Delta E_{int}]_{A\to B} = 0 \text{ ó } E_{int} = CTE$$

Si las fuerzas externas también son conservativas, existen funciones escalares $U_i = U_i(\vec{r}_i)$ tal que:

$$W_{ext}(A \to B) = - [U_{ext}(B) - U_{ext}(A)] = - [\Delta U_{ext}]_{A \to B}$$

donde: $$U_{ext} = \sum_{i=1}^{n} U_i$$

es la energía potencial externa del sistema. En este caso se cumple:

$$- [\Delta U_{ext}]_{A \to B} = [\Delta E_{int}]_{A \to B}$$

Luego: $$[\Delta E]_{A \to B} = 0 \text{ ó } E = CTE$$

Donde: $$E \equiv E_{int} + U_{ext} = K + U_{int} + U_{ext}$$

es la energía mecánica del sistema.

1. Sean $m_1 = 1$ kg y $m_2 = 2$ kg la masa de dos partículas inicialmente en reposo y unidas por una cuerda extendida (figura 1a) de longitud L=0.5 m. En t=0s se aplica una fuerza constante de magnitud F = 12N sobre m_2 en la dirección de la recta que une a m_1 y m_2 y alejándose de m_1. (a) ¿Cuál será la posición del c.m. y la cantidad de movimiento del sistema en los tiempos t = 0s, 1s y 2s; (b) Responda las mismas preguntas que en (a) cuando la cuerda no está inicialmente extendida (figura 1b), pero las masas están inicialmente separadas una distancia L.

2. Dos partículas de masa $m_1 = 2$ kg y $m_2 = 3$ kg y en reposo, están unidas por un resorte comprimido (de constante desconocida K), y se les aplica las fuerzas constantes $\vec{F}_1 = 6\,\hat{i}$ N y $\vec{F}_2 = 4\,\hat{j}$ N como se muestra en la figura 2. La distancia inicial entre las masas es de 0.5 m. Si el movimiento se efectúa en un plano horizontal sin fricción, calcular: (a) la aceleración del c.m.; (b) la posición del c.m. en t = 2s; y (c) la velocidad del c.m. al tiempo t = 3s; (d) en este sistema de dos partículas, ¿Es posible describir el movimiento individual de cada una de las partículas?.

3. Dos partículas de masas iguales de magnitud 1 kg, se mueven con velocidades iniciales $V_{1i} = 5$ m/s y $V_{2i} = 10$ m/s como se indican en la figura 3. Las únicas fuerzas externas son sus pesos, y no hay interacción mutua. Encontrar: (a) el vector de posición del c.m. al tiempo t = 4s; (b) la velocidad del c.m. al tiempo t = 3s; (c) la ecuación de la trayectoria que sigue el c.m.; (d) en este sistema de dos partículas, ¿es posible describir el movimiento individual de cada una de las partículas?.

4. Dos cuerpos de masa igual y de magnitud m = 8 kg están unidos por una barra rígida de masa despreciable. Estando inicialmente en reposo, se hallan bajo la acción de las fuerzas $\vec{F}_1 = 8\,\hat{i}$ N y $\vec{F}_2 = 6\,\hat{j}$ N como se muestra en la figura 4. Si el movimiento de los cuerpos se realiza en un plano horizontal sin fricción, calcular: (a) el vector de posición del c.m. al tiempo t = 2s; (b) el momento lineal total del sistema al tiempo t = 5s; (c) en este sistema de dos partículas, ¿es posible describir el movimiento individual de cada una de las partículas?.

5. Supongamos que una persona está en una superficie de hielo sobre un trineo en reposo. La masa del sistema (trineo + persona) es M = 150 kg, además hay 3 masas de 1 kg cada una, que la persona puede lanzar con velocidad relativa al trineo de V_{rel} = 3 m/s. ¿Cómo adquirirá mayor velocidad el (trineo + persona), lanzando las tres masas simultáneamente con V_{rel} o lanzando una después de otra con velocidad V_{rel}? (ver la figura 5).

6. Una vasija en reposo explota, quebrándose en tres partes. Dos de ellas, teniendo masas iguales, salen volando perpendicularmente una a la otra con la misma velocidad de 30 m/s. La tercera parte tiene tres veces más masa que cada una de las anteriores. ¿Cuál es la dirección y magnitud de su velocidad inmediatamente después de la explosión?.

7. Dos esferas de masa m_1 = 0.2 kg y m_2 = 0.1 kg cuelgan una junto a la otra de hilos paralelos y de igual longitud (figura 6). La primera esfera se desvía hacia un lado de modo que su c.m. se eleva 4.5×10^{-2}m y luego se suelta.. ¿A qué alturas se elevarán las esferas después de chocar entre sí?: (a) si el choque es elástico y (b) si el choque es totalmente inelástico.

8. Una bola de masa m se dispara con una velocidad V dentro del barril de un arma de fuego de resorte de masa M que se encuentra en reposo en una superficie sin fricción (figura 7). La masa m queda atorada en el barril en el punto de máxima compresión del resorte. No se pierde energía por rozamiento. ¿Qué fracción de la energía cinética inicial de la bola queda almacenada en el resorte?.

9. Las dos masas de la figura 8 están ligeramente separadas y se encuentran inicialmente en reposo; la masa de la izquierda se dirige hacia ellas con una velocidad V_o. Suponiendo choques elásticos y frontales, (a) Si $M = m$, demostrar que hay exactamente dos choques y encontrar todas las velocidades finales; (b) si $M > m$, demostrar que hay 3 choques y encontrar todas las velocidades finales.

10. Un bloque de masa $m_1 = 2$ kg se desliza en una mesa sin rozamiento con una velocidad de 10 m/s. Directamente enfrente de él y moviéndose en la misma dirección y sentido hay un bloque de masa $m_2 = 5$ kg que se mueve con una velocidad de 3 m/s. Un resorte sin masa, con una constante de resorte $k =$ 1120 N/m, va fijo en la parte posterior de m_2 como se muestra en la figura 9. Cuando chocan los bloques, ¿Cuál es la máxima compresión del resorte?, Supóngase que el resorte no se dobla y que siempre obedece la ley de Hooke.

11. Dos partículas de masas $m_1 = 3$kg y $m_2 = 5$kg se mueven libremente sobre un plano horizontal sin fricción con velocidades V_{1i}=5m/s y V_{2i} = 4m/s, respectivamente como se muestra en la figura 10. Calcular: (a) la energía cinética y el momento angular del sistema al tiempo t = 2s con respecto a 0 y con respecto al c.m. al tiempo t = 4s.

12. Sobre dos partículas inicialmente en reposo y de masas $m_1 = 5$ kg y $m_2 = 7$ kg actúan sólo las fuerzas externas constantes de magnitud $F = 30$ N como se muestra en la figura 11. Si el movimiento se efectúa en un plano horizontal sin fricción, calcular: (a) la aceleración de c.m.; (b) la torca total externa con respecto a 0; y (c) la torca total externa con respecto al c.m.

13. Dos partículas de masas $m_1 = 2$kg y $m_2 = 8$ kg se mueven libremente sobre un plano horizontal sin fricción con velocidades $V_{1i} = 20$ m/s y $V_{2i} = 30$ m/s, respectivamente como se muestran en la figura 12. Calcular: (a) las velocidades de m_1 y m_2 al tiempo $t = 2$s y 8s; (b) el momento angular y la energía cinética con respecto a 0 al tiempo $t = 2$s y 8s; (c) el momento angular y la energía cinética con respecto al c.m. al tiempo $t = 2$s y 8s.

14. Un disco de masa $m_1 = 0.2$ kg choca de frente con otro de masa $m_2 = 0.4$ kg que está en reposo y unido a una cuerda ligera e inextensible de longitud $r_o = 0.5$ m fija en el punto 0, como se muestra en la figura 13. Si el movimiento de los discos se efectúa en un plano horizontal sin fricción con $V_{1i} = 2$ m/s y consideramos el choque elástico, calcular: (a) las velocidades de m_1 y m_2 inmediatamente después del choque, y la velocidad angular de m_2 respecto de 0, (b) verificar que respecto de 0 el momento angular total del sistema se conserva en el choque, (c) ¿se conserva el momento angular de la masa m_2 después del proceso del choque?, (d) si en el movimiento de m_2 la cuerda se enrolla en el punto 0, calcular su velocidad angular cuando la longitud de la cuerda es $r_f = 0.2$ m, (e) calcular el cambio de la energía cinética de m_2 cuando la cuerda varía su longitud de r_o a r_f. ¿A qué se debe este cambio?

Figura 1a

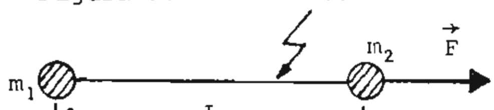


Figura 1b

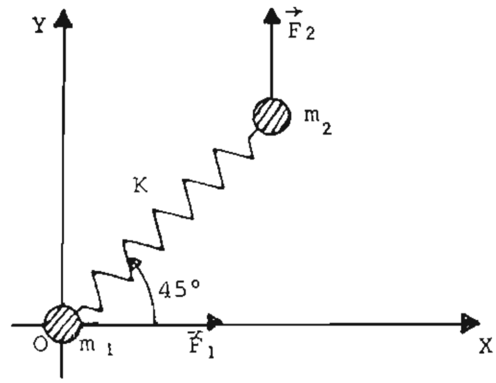


Figura 2

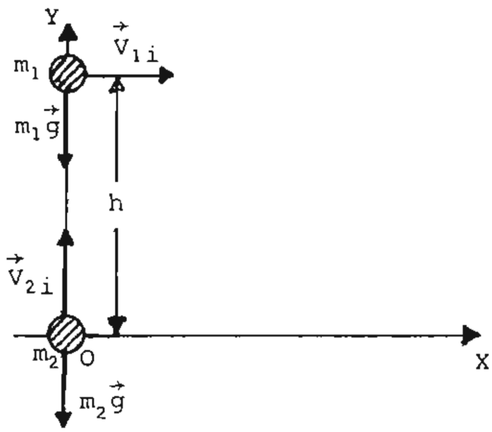


Figura 3

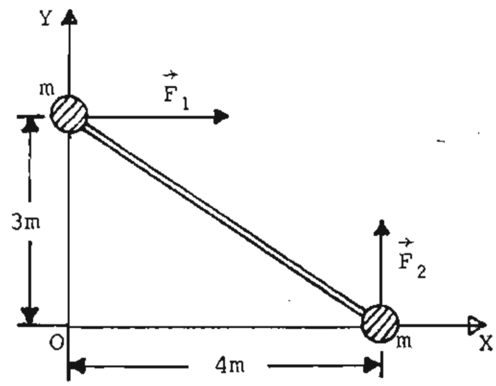


Figura 4

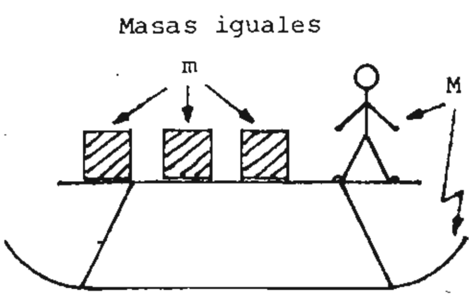


Figura 5

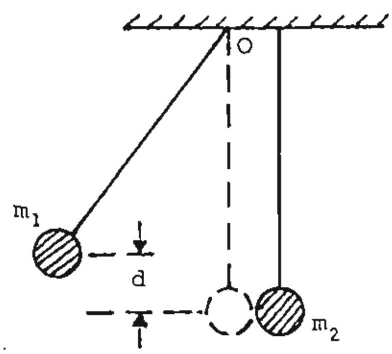


Figura 6

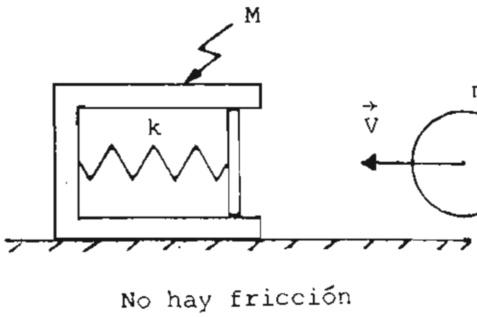


Figura 7

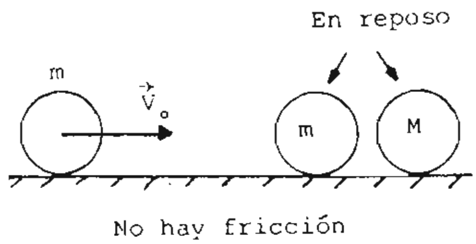


Figura 8

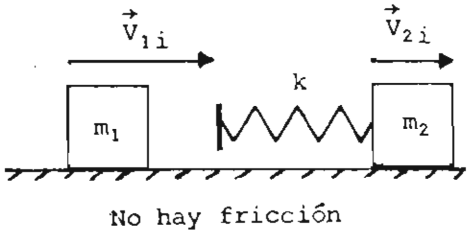


Figura 9

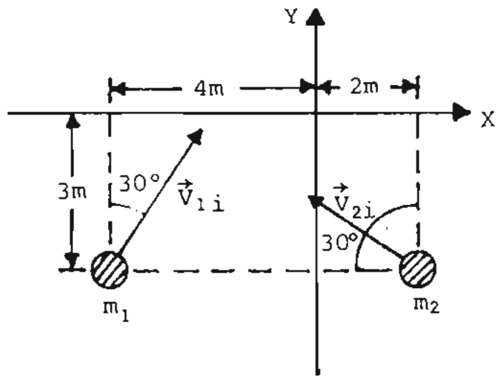


Figura 10

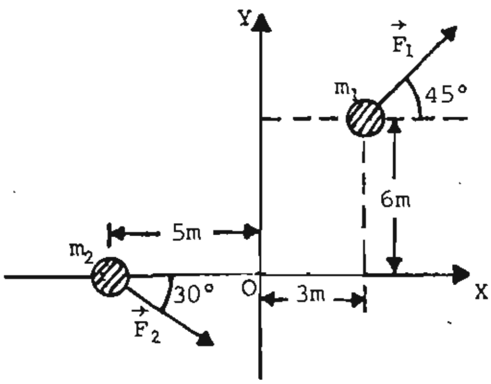


Figura 11

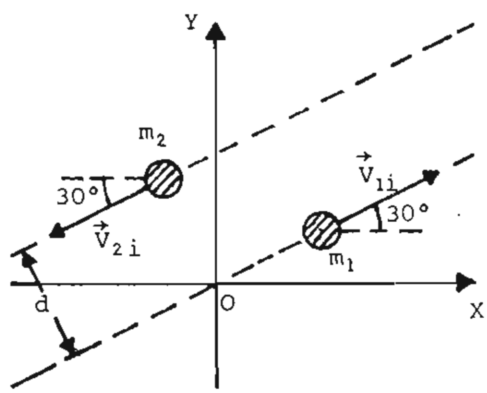


Figura 12

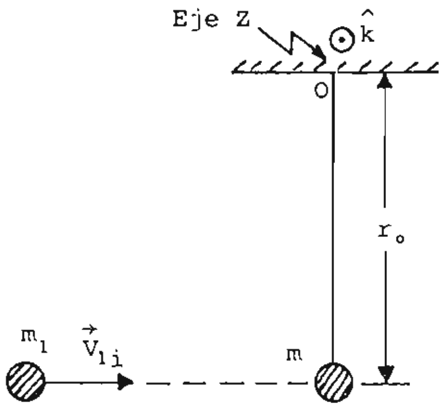


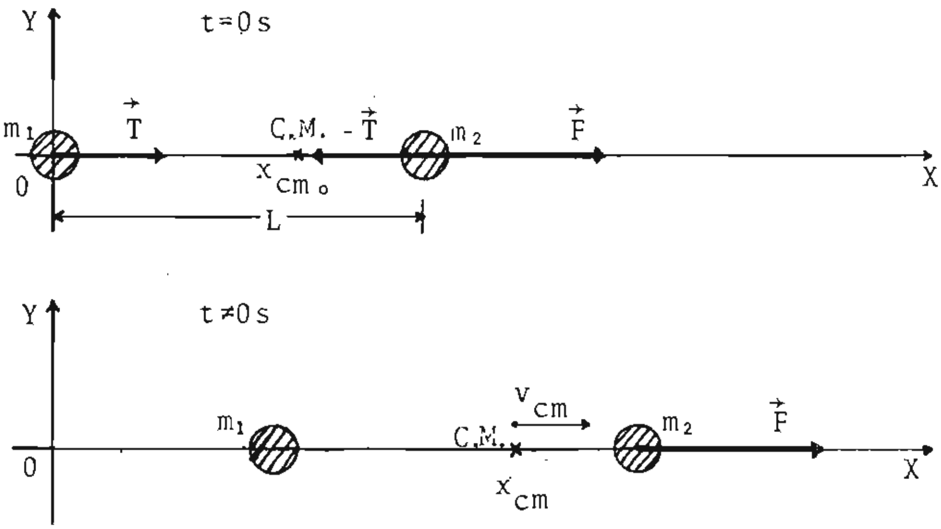
Figura 13

SOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS DE LA UNIDAD I DE DINÁMICA

Problema 1:

a) Las partículas m_1 y m_2 interactúan a través de la cuerda, si la masa de ésta es despreciable, entonces la fuerza que m_1 ejerce a m_2 es igual y de sentido contrario a la que m_2 ejerce sobre m_1, por lo tanto el C.M. del sistema se mueve con aceleración dada por:

$$\vec{a}_{cm} = \frac{\vec{F}}{M}$$



Respecto de un S.R. como el que se ilustra en la Figura tenemos $\vec{F} = F\hat{i}$ = CTE y por lo tanto el C.M. se mueve con aceleración dirigida a lo largo del eje x positivo con magnitud:

$$a_{cm} = \frac{F}{m_1+m_2} = \frac{12N}{1kg+2kg} = 4m/s$$

Es decir $\vec{a}_{cm}$ = CTE, por lo tanto el movimiento del C.M. queda descrito por las ecuaciones del movimiento uniformemente acelerado, es decir:

$$x_{cm}(t) = x_{cm_\circ} + v_{cm_\circ} t + \frac{1}{2} a_{cm} t^2; \quad v_{cm}(t) = v_{cm_\circ} + a_{cm} t$$

Las condiciones iniciales de movimiento, respecto al S.R. ilustrado, son:

$$x_{cm_\circ} = \frac{m_1(0) + m_2(L)}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} L = \frac{2kg}{1kg + 2\ kg}(0.5m) = 0.33m$$

$v_{cm_\circ} = 0$, ya que $v_1 = v_2 = 0$ en $t = 0$

Luego:

$$x_{cm}(t) = 0.33m + \frac{1}{2}(4m/s^2)t^2 = 0.33m + (2m/s^2)\ t^2$$

$$v_{cm} = (4m/s^2)t$$

Por lo tanto:

$\underline{x_{cm}(0) = x_{\circ cm} = 0.33\ m}$

$\underline{x_{cm}(1s) = 0.33m + (2m/s^2)\ (1s)^2 = 2.33m}$

$\underline{x_{cm}(2s) = 0.33m + (sm/s^2)\ (2s)^2 = 8.33m}$

$v_{cm}(0) = v_{\circ cm} = 0$

$v_{cm}(1s) = (4m/s^2)\ (1s) = 4m/s$

$v_{cm}(2s) = (4m/s^2)\ (2s) = 8m/s$

El momento lineal del sistema se puede obtener como:

$$\vec{P}_T = M\vec{v}_{cm}$$

Por lo tanto:

$\underline{P_T(0) = Mv_{\circ cm} = (3kg)\ (0) = 0}$

$\underline{P_T(1s) = Mv_{cm}(1s) = (3kg)\ (4m/s) = 12kgm/s}$

$\underline{P_T(2s) = Mv_{cm}(2s) = (3kg)\ (8m/s) = 24kgm/s}$

b) En este caso, sea t' el tiempo en que se estira la cuerda, por lo tanto la fuerza que m_1 ejerce sobre m_2 esta dada por:

$$\vec{F}_{12} = \begin{cases} \vec{0} \text{ para } 0 \leq t < t' \\ -T\hat{\imath} \text{ para } t' \leq t \end{cases}$$

y la fuerza que m_2 ejerce sobre m_1 es:

$$\vec{F}_{21} = \begin{cases} \vec{0} \text{ para } 0 \leq t < t' \\ T\hat{\imath} \text{ para } t' \leq t \end{cases}$$

Luego $\vec{F}_{21} = \vec{F}_{12}$ para todo t, por lo tanto el movimiento del C.M. queda descrito por la ec. $M\vec{a}_{cm} = \vec{F}_{ext}$.

Así los resultados son los mismos que en (a).

<u>Problema 2</u>

a) La interacción entre m_1 y m_2 ocurre a través del resorte, por lo tanto las fuerzas que se ejercen entre sí cumplen la 3a. Ley de Newton; luego el C.M. del sistema se mueve con aceleración dada por:

$$\vec{a}_{cm} = \frac{\vec{F}_{ext}}{M} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2}{m_1 + m_2}$$

Respecto del S.R. ilustrado en la Fig. 2 tenemos:

$$\vec{F}_1 = F_1\hat{\imath} \quad y \quad \vec{F}_2 = F_2\hat{\jmath}$$

Entonces: $$\vec{a}_{cm} = \frac{F_1\hat{\imath}+F_2\hat{\jmath}}{m_1+m_2}$$

y: $$a_{cmx} = \frac{F_1}{m_1+m_2} = \frac{6N}{2kg+3kg} = 1.2m/s^2$$

$$a_{cmy} = \frac{F_2}{m_1+m_2} = \frac{4N}{2kg+3kg} = 0.8m/s^2$$

b) Se observa que $\vec{a}_{cm}$ = CTE, entonces:

$$\vec{r}_{cm}(t) = \vec{r}_{cm_o} + \vec{v}_{cm_o}t + \frac{1}{2}\vec{a}_{cm}t^2$$

Es decir: $$x_{cm}(t) = x_{cm_o} + v_{cmx_o}t + \frac{1}{2}a_{cmx}t^2$$

$$y_{cm}(t) = y_{cm_o} + v_{cmy_o}t + \frac{1}{2}a_{cmy}t^2$$

Donde: $$x_{cm_o} = \frac{m_1(0) + m_2(d\cos 45°)}{m_1+m_2} = \frac{m_2}{m_1+m_2}d\cos 45° =$$

$$= \frac{2kg}{2kg+3kg}(0.5m)\cos 45° = 0.21\ m$$

$$y_{cm_o} = \frac{m_1(0) + m_2(d\,\mathrm{sen}45°)}{m_1+m_2} = \frac{m_2}{m_1+m_2}d\,\mathrm{sen}45°$$

$$= \frac{3kg}{2kg+3kg}(0.5m)\,\mathrm{sen}45° = 0.21m$$

Como las partículas se encuentran inicialmente en reposo, entonces $\vec{v}_{cm_o} = \vec{0}$, luego $v_{cmx_o} = 0$ y $v_{cmy_o} = 0$, luego:

$$x_{cm}(t) = 0.21m + \frac{1}{2}(1.2m/s^2)t^2 = 0.21m + (0.6m/s^2)t^2$$

$$\Rightarrow x_{cm}(t=2s) = 0.21m + (0.6m/s^2)\ (2s)^2 = 2.61m.$$

$$y_{cm}(t) = 0.21m + \frac{1}{2}(0.8m/s^2)t^2 = 0.21m + (0.4m/s^2)t^2$$

$$\Rightarrow y_{cm}(t=2s) = 0.21m + (0.4m/s^2)(2s)^2 = 1.81m$$

Así: $\vec{r}_{cm}(t=2s)=(2.61m)\hat{\imath} + (1.81m)\hat{\jmath}$

c) Como $\vec{a}_{cm}$=CTE, entonces:

$\vec{v}_{cm} = \vec{v}_{cm_0} + \vec{a}_{cm}t = \vec{a}_{cm}t$, es decir:

$$v_{cmx}(t) = a_{cmx}t = (1.2m/s^2)t$$

$$v_{cmy}(t) = a_{cmy}t = (0.8m/s^2)t$$

Luego: $v_{cmx}(t=3s) = (1.2m/s^2)(3s) = 3.6m/s$

$v_{cmy}(t=3s) = (0.8m/s^2)(3s) = 2.4m/s$

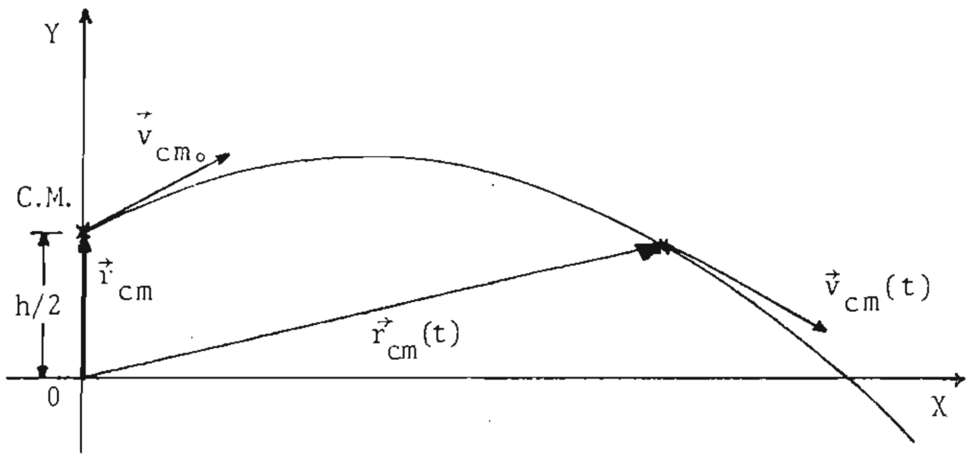
Así: $\vec{v}_{cm}(t=3s) = (3.6m/s)\hat{\imath} + (2.4m/s)\hat{\jmath}$

d) No, porque se necesita conocer k y la deformación inicial del resorte.

Problema 3:

El C.M. del sistema se mueve con una aceleración dada por:

$$\vec{a}_{cm} = \frac{\vec{F}_{ext}}{M} + \frac{\vec{F}_{ext}}{2m}$$



Respecto del S.R. ilustrado en la figura se tiene:

$$a_{cm} = \frac{-mg\hat{\jmath}-mg\hat{\jmath}}{2m} = -g\hat{\jmath} = CTE$$

Por lo tanto, la velocidad y posición del C.M. son:

$$\vec{v}_{cm}(t) = \vec{v}_{cm_o} + \vec{a}_{cm}t, \quad \vec{r}_{cm}(t) = \vec{r}_{cm_o} + \vec{v}_{cm_o}t + \tfrac{1}{2}\vec{a}_{cm}t^2$$

Donde: $\vec{r}_{cm_o} = \dfrac{m\vec{o}+mh\hat{\jmath}}{2m} = \dfrac{h}{2}\hat{\jmath}$

$$v_{cm_o} = \frac{mv_{1i}\hat{\imath}+mv_{2i}\hat{\jmath}}{2m} = \frac{v_{1i}}{2}\hat{\imath} + \frac{v_{2i}}{2}\hat{\jmath}$$

En coordenadas:

$$v_{cmx}(t) = \frac{v_{1i}}{2} = CTE, \quad v_{cmy} = \frac{v_{2i}}{2} - gt$$

$$x_{cm} = \frac{v_{1i}}{2}t \quad , \quad y_{cm} = \frac{h}{2} + \frac{v_{2i}}{2}t - \frac{1}{2}gt^2$$

a) $x_{cm}(t=4s) = \frac{5m/s}{2}(4s) = 10m$

$y_{cm}(t=4s) = \frac{10m}{2} + \frac{10m/s}{2}(4s) - \frac{1}{2}(9.8m/s^2)(4s)^2 = -53.4m$

entonces: $\vec{r}_{cm}(t=4s) = (10m)\hat{\imath} - (53.4m)\hat{\jmath}$

b) $v_{cmx}(t=3s) = \frac{5m/s}{2} = 2.5m/s$

$v_{cmy}(t=3s) = \frac{10m/s}{2} - (9.8m/s)(3s) = -24.4m/s$

entonces: $\vec{v}_{cm}(t=3s) = (2.5m/s)\hat{\imath} - (24.4m/s)\hat{\jmath}$

c) La ecuación de la trayectoria en términos del parámetro t es:

$x_{cm}(t) = 2.5t \quad , \quad y_{cm}(t) = 10 + 5t - 4.9t^2$

o eliminando el parámetro t en las ecuaciones tenemos:

$$y_{cm} = 10 + 2x_{cm} - 0.78x_{cm}^2$$

que es la ecuación de una parábola en el plano x-y

d) Si es posible, puesto que no hay fuerza de interacción entre ellas, y por consiguiente se puede aplicar la 2a. Ley de Newton a cada partícula individualmente:

$$\vec{F}_1 = m_1\vec{a}_1 = m_1\vec{g} \quad ; \quad \vec{F}_2 = m_2\vec{a}_2 = m_2\vec{g}$$

4: Como la masa de la barra es despreciable entonces las fuerzas de interacción entre las partículas cumplen con la 3a. Ley de Newton y entonces el C.M. se mueve con una aceleración $\vec{a}_{cm}$ dada por:

$$\vec{a}_{cm} = \frac{\vec{F}_{ext}}{M} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2}{2m}$$

Respecto del S.R. ilustrado en la fig. 4 tenemos: $\vec{F}_1 = (8N)\hat{\imath}$, $\vec{F}_2 = (6N)\hat{\jmath}$.

Luego:

$$\vec{a}_{cm} = \frac{(8N)\hat{\imath} + (6N)\hat{\jmath}}{2(8kg)} = (0.5m/s^2)\hat{\imath} + (0.37m/s^2)\hat{\jmath} + CTE$$

Por lo tanto la velocidad y posición del C.M. es:

$$\vec{v}_{cm}(t) = \vec{v}_{cm_o} + \vec{a}_{cm}t \quad ; \quad \vec{r}_{cm}(t) = \vec{r}_{cm_o} + \vec{v}_{cm_o}t + \frac{1}{2}\vec{a}_{cm}t^2$$

Donde: $\vec{v}_{cm_o} = \vec{0}$ ya que inicialmente las partículas se encuentran en reposo, y:

$$\vec{r}_{cm_o} = \frac{(8kg)(3m)\hat{\jmath} + (8kg)(4m)\hat{\imath}}{16kg} = (2m)\hat{\imath} + (1.5m)\hat{\jmath}$$

Entonces: $\vec{v}_{cm}(t) = [(0.5m/s^2)t]\hat{\imath} + [(0.37m/s\ )t]\hat{\jmath}$

$$\vec{r}_{cm}(t) = [2m + (0.25m/s^2)t^2]\hat{\imath} + [1.5m + (0.18m/s^2)t^2]\hat{\jmath}$$

Luego:

a) $\vec{r}_{cm}(t=2s) = [2m + (0.25m/s^2)(2s)^2]\hat{\imath} + [1.5m + (0.18m/s^2)(2s)^2]\hat{\jmath}$

$$= (3m)\hat{\imath} + (2.22m)\hat{\jmath}$$

b) $\vec{v}_{cm}(t=5s) = [(0.5m/s^2)(5s)]\hat{\imath} + [(0.37m/s^2)(5s)]\hat{\jmath} =$

$$= (2.5m/s)\hat{\imath} + (1.85m/s)\hat{\jmath}$$

como $\vec{P} = M\vec{v}_{cm}$, entonces:

$$\vec{P}(t=5s) = M\vec{v}_{cm}(t=5s) = (16kg)[(2.5m/s)\hat{\imath} + (1.85m/s)\hat{\jmath}] =$$

$$= (40kg\tfrac{m}{s})\hat{\imath} + (29.6kg\tfrac{m}{s})\hat{\jmath}$$

c) Si, pues debido a que la distancia de separación entre ellas es fija, se moverán describiendo trayectorias circulares alrededor del C.M.

Problema 5.

Despreciando la fuerza de fricción que el hielo le ejerce al trineo, tenemos:

$$\vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

Si suponemos que en cada lanzamiento, entre la persona y las masas se ejercen fuerzas que cumplen la 3a. Ley de Newton, entonces para cada lanzamiento se tiene que cumplir:

$$\vec{P}_f = \vec{P}_i$$

Supongamos que los lanzamientos de las masas m = 1kg son horizontales y consideremos que:

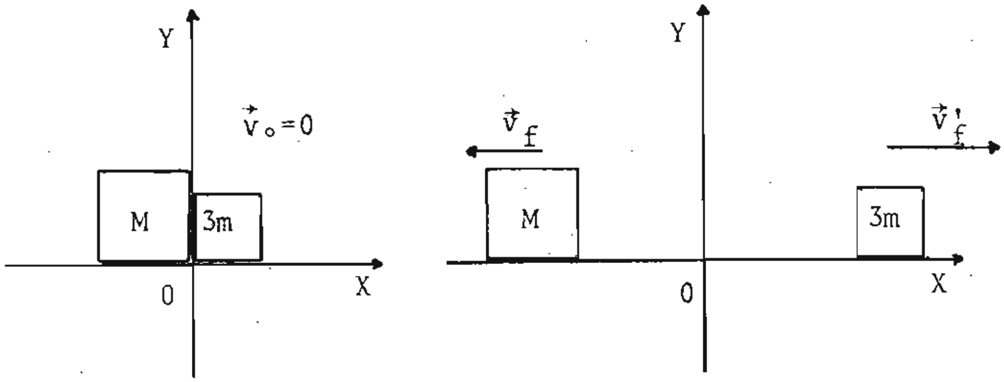
a) Se lanzan los tres bloques juntos; en este caso tenemos:

Antes del lanzamiento $P_i = 0$

Después del lanzamiento:

$$P_f = -Mv_f + 3mv_f'$$

Como $P_f = P_i \Longrightarrow Mv_f - 3mv_f' = 0 \Rightarrow v_f = \frac{3m}{M} v_f'$



Antes del lanzamiento   Después del lanzamiento

Como 3m se mueve respecto de M con velocidad relativa v_R, entonces se debe cumplir:

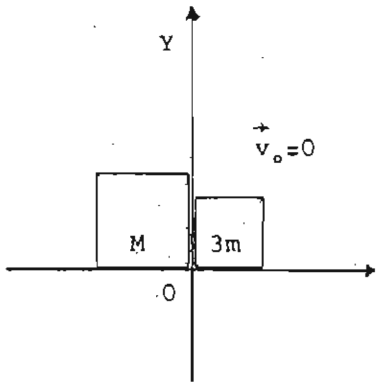
$$v_R = v_f + v_f' \Rightarrow v_f' = v_R - v_f$$

entonces: $$v_f = \frac{3m}{M}(v_R - v_f) \Rightarrow v_f + \frac{3m}{M} v_f = \frac{3m}{M} v_R$$

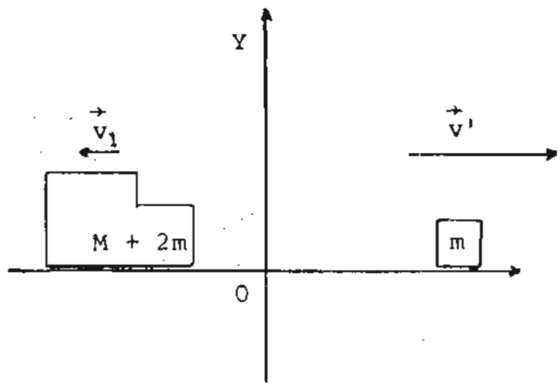
$$\Rightarrow Mv_f + 3Mv_f = 3mv_R \Rightarrow \underline{v_f \frac{3m}{M+3m} v_R}$$

$$\Rightarrow v_f = \frac{3(1kg)}{150kg + 3(1kg)} (3m/s) = \underline{\underline{0.0588 m/s}}$$

b) Se lanza uno por uno de los bloques; tenemos:



Antes del 1er. lanzamiento



Después del 1er. lanzamiento

1er. lanzamiento:

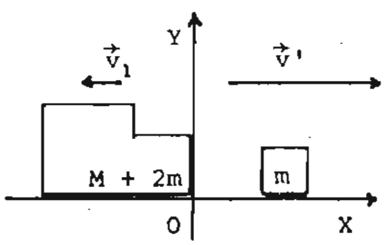
Antes del lanzamiento: $P_i = 0$

Después del lanzamiento: $P_f = -(M+2m)v_1+mv'$

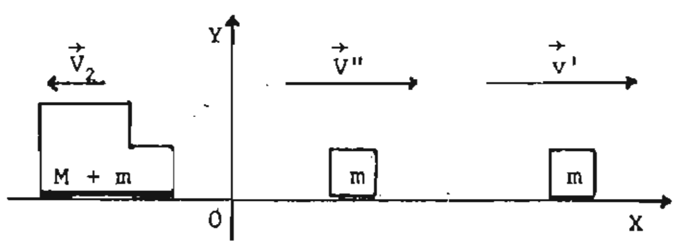
Donde: v_1 y v' son tales que: $v_R = v_1+v'$, es decir: $v' = v_R-v_1$

Luego: $P_f = -(M+2m)v_1+m(v_R-v_1) = -(M+3m)v_1+mv_R$

Como: $P_f = P_i \Longrightarrow -(M+3m)v_1+mv_R = 0 \Longrightarrow \underline{v_1 = \frac{m}{M+3m}v_R}$



Antes del 2° lanzamiento



Después del 2° lanzamiento

2° Lanzamiento:

Antes del Lanzamiento: $P_i = -(M+2m)v_1+mv'$

Después del lanzamiento: $P_f = -(M+m)v_2+mv'' + mv'$

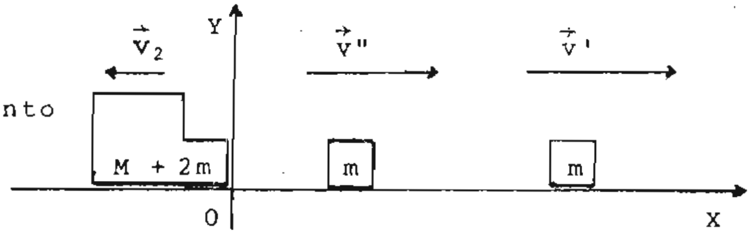
Donde: v_2 y v'' son tales que $v_R = v_2 + v'' \Longrightarrow v'' = v_R - v_2$

Entonces: $P_f = -(M+m)v_2 + m(v_R-v_2) + mv' = -(M+2m)v_2 + mv_R + mv'$

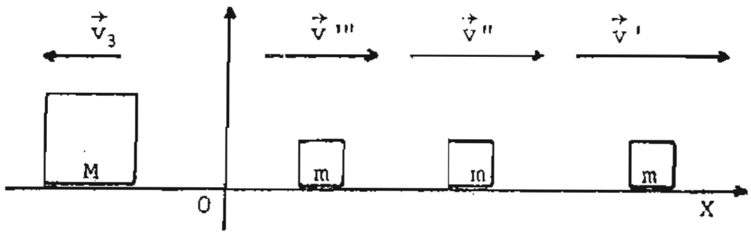
Como: $\vec{P}_f = \vec{P}_i \Longrightarrow -(M+2m)v_2 + mv_R + mv' = -(M+2m)v_1 + mv'$

$$\Longrightarrow v_2 = v_1 + \frac{m}{M+2m} v_R \Longrightarrow v_2 = \frac{m}{M+3m} v_R + \frac{m}{M+2m} v_R$$

Antes del
3er. lanzamiento



Despues del
3er. lanzamiento



3er. lanzamiento:

Antes del lanzamiento: $P_i = -(M+m)v_2 + mv'' + mv'$

Después del lanzamiento: $P_f = -mv_3 + mv''' + mv'' + mv'$

Donde: v_3 y v''' deben ser tales que: $v_R = v_3 + v''' \Longrightarrow v''' = v_R - v_3$

Luego: $P_f = -Mv_3 + m(v_R-v_3) + mv'' + mv'$

$\quad\quad = -(M+m)v_3 + mv_R + mv'' + mv'$

como $P_f = P_i \Longrightarrow -(M+m)v_3 + mv_R + mv'' = -(M+m)v_2 + mv'' + mv'$

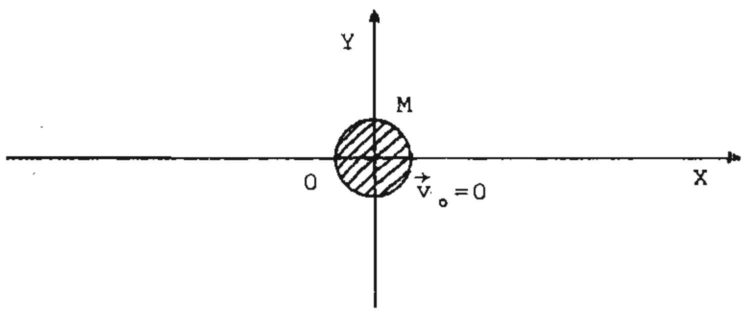
$$\Longrightarrow v_3 = v_2 + \frac{m}{M+m} v_R \Longrightarrow \underline{v_3 = \frac{m}{M+3m} v_R + \frac{m}{M+2m} v_R + \frac{m}{M+m} v_R}$$

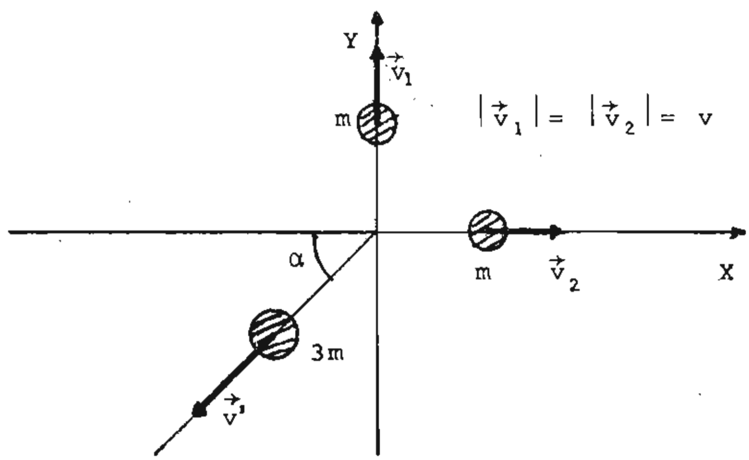
$$\Longrightarrow v_3 = \frac{1kg}{150kg+3(1kg)}(3m/s) + \frac{1kg}{150kg+2(1kg)}(3m/s) + \frac{1kg}{150\ kg+1kg}(3m/s) =$$

$$= \underline{\underline{0.0592m/s}}$$

Es decir: $\underline{\underline{v_3 > v_f}}$

Problema 6.





Por conservación del momento lineal tenemos:

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f$$

Donde: $\vec{P}_i = \vec{0}$

$$\vec{P}_f = mv\hat{\imath} + mv\hat{\jmath} - 3m(v'\cos\alpha\hat{\imath} + v'\text{sen}\alpha\hat{\jmath})$$

$$= (mv - 3mv'\cos\alpha)\hat{\imath} + (mv - 3mv'\text{sen}\alpha)\hat{\jmath}$$

Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} mv - 3mv'\cos\alpha = 0 \\ mv - 3mv'\text{sen}\alpha = 0 \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} v'\cos\alpha = \frac{v}{3} \\ v'\text{sen}\alpha = \frac{v}{3} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha = \arctan(1) = 45° \\ v' = \sqrt{\frac{2v^2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}\,v = \frac{\sqrt{2}}{3}(30\text{m/s}) = 14.14\text{m/s} \end{cases}$$

Problema 7.

Por conservación de energía, la velocidad v_{1i} de m_1 en el instante del choque es tal que:

$$\frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 = m_1gd \Rightarrow v_{1i} = \sqrt{2gd} = \sqrt{2(9.8\text{m/s})(0.045\text{m})} = 0.93\text{m/s}$$

a) Si el choque es elástico se tiene:

Por conservación del momento:

$$m_1v_{1i} = m_1v_{1f} + m_2v_{2f}$$

Por conservación de la energía cinética:

$$\frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

Resolviendo estas dos ecuaciones para v_{1f} y v_{2f} tenemos:

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} = \frac{0.2kg - 0.1kg}{0.2kg + 0.1kg}(0.93m/s) = 0.31m/s$$

$$v_{2f} = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} = \frac{2(0.2kg)}{0.2kg + 0.1kg}(0.93m/s) = 1.24\ m/s$$

Por conservación de la energía para m_1 y m_2; la altura que alcanzan es tal que:

$$m_1 g h_1 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 \Rightarrow h_1 = \frac{v_{1f}^2}{2g} = \frac{(0.31m/s)^2}{2(9.8m/s^2)} = 0.0049m$$

$$m_2 g h_2 = \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \Rightarrow h_2 = \frac{v_{2f}^2}{2g} = \frac{(1.24m/s)^2}{2(9.8m/s^2)} = 0.0784m$$

b) Si el choque es completamente inelástico, la velocidad v_f del cuerpo es tal que:

De la conservación del momento lineal:

$$m_1 v_{1i} = (m_1 + m_2)\ v_f \Rightarrow v_f = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} = \frac{0.2kg}{0.2kg + 0.1kg}(0.93m/s)$$

$$= 0.62m/s$$

Por conservación de la energía, la altura h que alcanza el cuerpo $(m_1 + m_2)$ es tal que:

$$(m_1+m_2)gh = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_f^2 \Rightarrow h = \frac{v_f^2}{2g} = \frac{(0.62m/s)^2}{2(9.8m/s^2)} = 0.196m$$

Problema 8:

La máxima compresión del resorte ocurre cuando la velocidad de m y M son iguales, en este caso el proceso es similar al de un choque completamente inelástico. La velocidad v_f que adquiere (m+M) es, de la conservación del momento:

$$(M+m)v_f = mv \Rightarrow v_f = \frac{m}{M+m} v$$

La energía cinética es:

Antes del choque: $K_i = \frac{1}{2}mv^2$

Después del choque: $K_f = \frac{1}{2}(M+m)v_f^2 = \frac{1}{2}(M+m)\frac{m^2}{(M+m)^2}v^2 =$

$$= \frac{m}{M+m}\frac{1}{2}mv^2 = \frac{m}{M+m}K_i$$

Luego: $\Delta K = K_f - K_i = \frac{m}{M+m}K_i - K_i = \left[\frac{m}{M+m} - 1\right] K_i =$

$$= \frac{m-M-m}{M+m}K_i = -\frac{M}{M+m}K_i$$

Esta pérdida de energía cinética se transforma íntegramente en energía potencial del resorte, por lo tanto si la energía potencial inicial es cero: $U_i = 0$, tenemos:

$$U_f = \frac{M}{M+m}K_i$$

Problema 9:

En un choque elástico unidimensional entre dos partículas se tiene, de la conservación del momento y de la energía cinética que:

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i} \quad ; \quad v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{\ i} + \frac{m_2 - m_1}{m_i + m_2} v_{2i}$$

En el sistema mostrado en la Fig. 8 tenemos:

a) m=M. 1er. choque:

La bola m de la izquierda choca con la otra bola m, en este caso $m_1 = m_2 = m$, $v_{1i} = v_\circ$, $v_{2i} = 0$, por lo tanto:

$$v_{1f} = 0 \ , \quad v_{2f} = v_\circ$$

2° choque:

La bola m de enmedio choca con la bola M, en este caso: $m_1 = m_2 = m = M$, $v'_{1i} = v_\circ$, $v'_{2i} = 0$, entonces:

$$v'_{1f} = 0, \quad v_{2f} = v_\circ$$

y después de este choque las dos bolas m quedan en reposo y la bola M se mueve hacia la derecha con velocidad $v_\circ$.

b) M>m. 1er. choque:

La bola m de la izquierda choca con la otra bola m, en este caso: $m_1 = m_2 = m$, $v_{1i} = v_\circ$, $v_{2i} = 0$, por lo tanto:

$$v_{1f} = 0, \quad v_{2f} = v_\circ$$

2° choque:

La bola de enmedio choca con la bola M, en este caso: $m_1 = m$, $m_2 = M$. $v'_{1i} = v_\circ$, $v'_{2i} = 0$, M>m, entonces:

$$v'_{1f} = \frac{m-M}{m+M}v_o = -\frac{M-m}{m+M}v_o \quad ; \quad v'_{2f} = \frac{2m}{m+M}v_o$$

Como producto de este choque m se mueve hacia la izquierda y M hacia la derecha. El movimiento de m origina otro choque con la bola m de la izquierda, que se encuentra en reposo como producto del 1er. choque.

3er. choque:

En este caso: $m_1 = m_2 = m$, $v''_{1i} = -\frac{M-m}{m+M}v_o$; $v''_{2i} = 0$ entonces:

$$v''_{1f} = 0, \quad v''_{2f} = -\frac{M-m}{m+M}v_o$$

Como resultado de los tres choques:

La bola m de la izquierda se mueve hacia la izquierda con velocidad:

$$-\frac{M-m}{m+M}v_o$$

La bola m de enmedio queda en reposo.

La bola M se mueve hacia la derecha con velocidad $\frac{2m}{m+M}v_o$.

Problema 10:

La máxima compresión x del resorte ocurre cuando las velocidades de m_1 y m_2 son iguales; en este caso se puede suponer que m_1 y m_2 efectúan un choque completamente inelástico, por lo tanto la velocidad final de (m_1+m_2) es tal que;

Por conservación del momento lineal:

$$(m_1+m_2)\ v_f = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}$$

$$\Rightarrow v_f = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} = \frac{(2kg)(10m/s) + (5kg)(3m/s)}{2kg + 5kg} = 5m/s$$

Ahora la energía cinética es:

$$K_i = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2}(2kg)(10m/s)^2 + \frac{1}{2}(5kg)(3m/s)^2 = 122.5J$$

$$K_f = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_f^2 = \frac{1}{2}(2kg + 5kg)(5m/s)^2 = 87.5J$$

La energía potencial:

$$U_i = 0, \quad U_f = \frac{1}{2} k x^2$$

Por conservación de energía mecánica se debe cumplir:

$$K_f + U_f = K_i + U_i = K_i \Rightarrow U_f = K_i - K_f$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} k x^2 = K_i - K_f \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2(K_i - K_f)}{k}} = \sqrt{\frac{2(122.5J - 87.5J)}{1120N/m}} = 0.25m$$

Problema 11.

Como las partículas no interactúan y se mueven libremente, se cumple:

Respecto de "0": $\vec{L} = CTE$, $\vec{v}_{cm} = CTE$, $U_{ext} = CTE$, $U_{int} = CTE = 0$;

entonces:

a) $\vec{L}(t=\vec{0}) = \vec{r}_1(0) x (m_1 \vec{v}_{1i}) + r_2(0) x (m_2 \vec{v}_{2i}) =$

$$= (3kg)(-4\hat{\imath} - 3\hat{\jmath}) x (5 sen30° \hat{\imath} + 5 cos30° \hat{\jmath}) +$$

$$+ (5kg)(2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath}) x (-4 cos30° \hat{\imath} + 4 sen30° \hat{\jmath}) =$$

$$= (3kg) \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -4 & -3 & 0 \\ 5 sen30° & 5 cos30° & 0 \end{vmatrix} + (5kg) \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & -3 & 0 \\ -4 cos30° & 4 sen30° & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (3kg)[-4(5\cos 30°)-(-3)(5\operatorname{sen}30°)]\hat{k}$$

$$+ (5kg)[2(4\operatorname{sen}30°)-(-3)(-4\cos 30°)]\hat{k} =$$

$$= -(61.42kgm^2/s)\hat{k}$$

Como: $\vec{L}$ = CTE, entonces: $\vec{L}(t=2s) = -(61.42kgm^2/s)\hat{k}$

Ahora: $L(t=0) = \frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2i}^2 =$

$$= \frac{1}{2}(3kg)(5m/s)^2 + \frac{1}{2}(5kg)(4m/s)^2 = 77.5J$$

Como U_{ext} = CTE, $U_{int} = 0$ = CTE, de la conservación de la energía mecánica:

$$E = K + U_{ext} + U_{int} = CTE$$

se tiene que: K = CTE, por lo tanto:

$$K(t=2s) = K(t=0) = 77.5J$$

b) Dado que: $\vec{v}_{cm}$ = CTE, entonces: $\vec{L}_{cm}$ = CTE y como:

$$\vec{L}' = \vec{L} - \vec{L}_{cm} = CTE$$

Ahora: $\vec{r}_{cm}(t=0) = \dfrac{m_1\vec{r}_1(0)+m_2\vec{r}_2(0)}{m_1+m_2} = \dfrac{(3kg)(-4\hat{\imath}-3\hat{\jmath})+(5kg)(2\hat{\imath}-3\hat{\jmath})}{3kg+5kg} =$

$$= -025\hat{\imath}-3\hat{\jmath}(m)$$

y: $\vec{v}_{cm}(t=0) = \dfrac{m_1\vec{v}_{1i}+m_2\vec{v}_i}{m_1+m_2} = \dfrac{(3kg)(5\operatorname{sen}30°\hat{\imath}+5\cos 30°)+(5kg)(-4\cos 30°\hat{\imath}+4\operatorname{sen}30°\hat{\jmath})}{3kg+5kg} =$

$$= -1.22\hat{\imath}+2.76\hat{\jmath}\,(m/s)$$

Luego $\vec{L}_{cm}(t=0) = \vec{r}_{cm}(0)x(M\vec{v}_{cm}(0)) =$

$$=(8kg)(-0.25\hat{\imath}-3\hat{\jmath})x(-1.22\hat{\imath}+2.87\hat{\jmath}) =$$

$$(8kg)\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -0.25 & -3 & 0 \\ -1.22 & 2.87 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (8)[-0.25(2.87)-(-3)(-1.22)]\hat{k} = -(35.2kgm^2/s)\hat{k}$$

Entonces: $\vec{L}'(t=0) = \vec{L}(t=0)-\vec{L}_{cm}(t=0) = -61.42\hat{k}-(-35.02)\hat{k} =$

$= -(26.4kgm^2/s)\hat{k}$

Como $\vec{L}' = CTE$, entonces: $\vec{L}(t=4s) = \vec{L}(t=0) = -(26.4kgm^2/s)\hat{k}$

También tenemos: $K' = K-K_{cm}$, donde $K_{cm} = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 = CTE$

y $K = CTE$, entonces: $K' = CTE$

Ahora: $K_{cm}(t=0) = \frac{1}{2}M[v_{cm}(0)]^2 = \frac{1}{2}(8kg)((1.22)^2+(2.87)^2) = 38.9J$

Entonces: $K'(t=0) = K(0) - K_{cm}(0) = 77.5J-38.9J = 38.6J.$

Luego: $K'(t=4s) = K'(t=0) = 38.6J.$

Problema 12:

a) Tenemos: $\vec{a}_{cm} = \dfrac{\vec{F}_{ext}}{M} = \dfrac{\vec{F}_1+\vec{F}_2}{m_1+m_2} =$

$$= \frac{(30\cos45°\hat{\imath}+30\text{sen}45°\hat{\jmath})+(30\cos30°\hat{\imath}-30\text{sen}30°\hat{\jmath})}{5kg + 7kg} =$$

$$= (3.93m/s^2)\hat{\imath}+(0.51m/s^2)\hat{\jmath}$$

b) Tenemos: $\vec{\tau} = \vec{r}_1 x\vec{F}_1 + \vec{r}_2 x\vec{F}_2 =$

$$= (3\hat{\imath}+6\hat{\jmath})x(30\cos45°\hat{\imath}+30\text{sen}45°\hat{\jmath})+(-5\hat{\imath})x(30\cos30°\hat{\imath}-30\text{sen}30°\hat{\jmath}) =$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 3 & 6 & 0 \\ 30\cos45° & 30\text{sen}45° & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -5 & 0 & 0 \\ 30\cos30° & -30\text{sen}30° & 0 \end{vmatrix} =$$

$$=[3(30\text{sen}45°)-6(30\cos 45°)]\hat{k}+[-5(-30\text{sen}30°)]\hat{k} = (11.36\text{Nm})\hat{k}$$

c) Tenemos: $\vec{\tau}' = \vec{r}_1'x\vec{F}_1'+\vec{r}_2'x\vec{F}_2 = (\vec{r}_1-\vec{r}_{cm})x\vec{F}_1 + (\vec{r}_2-\vec{r}_{cm})x\vec{F}_2 =$

$$= \vec{r}_1 x\vec{F}_1+\vec{r}_2 x\vec{F}_2-r_{cm}x\vec{F}_1-\vec{r}_{cm}x\vec{F}_2 = \vec{\tau}' = \vec{r}_{cm}x(\vec{F}_1+\vec{F}_2)$$

Donde: $\vec{r}_{cm} = \dfrac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2} = \dfrac{(5kg)(3\hat{\imath}+6\hat{\jmath})+(7kg)(-5\hat{\imath})}{5kg+7kg} = 1.66m\hat{\imath}+2.5m\hat{\jmath}$

y: $\vec{F}_1+\vec{F}_2 = M\vec{a}_{cm} = (12kg)(3.93\hat{\imath}+0.5\hat{\jmath}) = 47.16N\hat{\imath}+6N\hat{\jmath}$

Luego: $\vec{r}_{cm}x(\vec{F}_1+\vec{F}_2) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -1.66 & 2.5 & 0 \\ 47.16 & 6 & 0 \end{vmatrix} = [(1.66)6-(2.5)47.16]\hat{k}$

$$= (128.96\text{Nm})\hat{k}$$

Luego: $\vec{\tau}' = 11.36\text{Nm}\hat{k}-(-128.96\text{Nm})\hat{k} = (140.32\text{Nm})\hat{k}$

Problema 13:

a) Como las partículas se mueven libremente, tenemos:

$$\vec{v}_1(t) = \vec{v}_{1i} = CTE; \quad \vec{v}_2(t) = \vec{v}_{2i} = CTE$$

Particularmente:

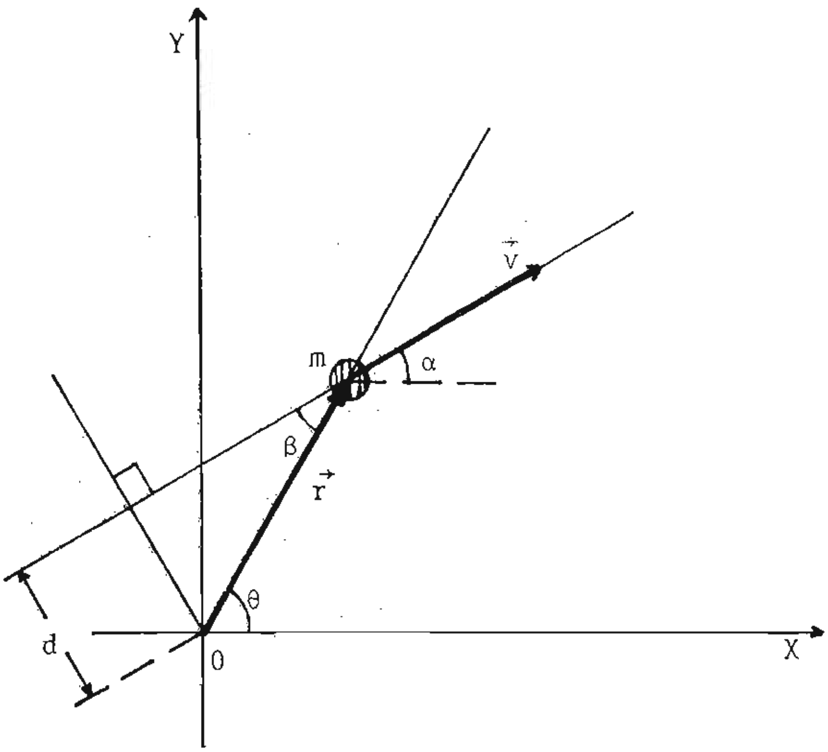
$$\vec{v}_1(t=2s)=\vec{v}_1(t=8s) = \vec{v}_{1i} = 20\cos 30°\hat{\imath}+20\text{sen}30°\hat{\jmath}$$

$$\vec{v}_2(t=2s)=\vec{v}_2(t=8s) = \vec{v}_{2i} = 30\cos 30°\hat{\imath}-30\text{sen}30°\hat{\jmath}$$

b) Como el sistema está libre de fuerzas, se cumple:

$$\vec{L} = CTE$$

Por lo tanto: $\vec{L}(t) = \vec{L}(t=0)$



Observemos que el momento angular de una partícula m que se mueve en línea recta, formando un angulo θ respecto del eje x positivo, con velocidad $\vec{v} = v\cos\alpha\hat{i}+v\,\text{sen}\alpha\hat{j}$, cuando su posición es $\vec{r}=r\cos\theta\hat{i}+r\,\text{sen}\theta\hat{j}$, es:

$$\vec{\ell}=\vec{r}x(m\vec{v})=m(r\cos\theta\hat{i}+r\,\text{sen}\theta\hat{j})x(v\cos\alpha\hat{i}+v\,\text{sen}\alpha\hat{j})=$$

$$=m\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{j}\\ r\cos\theta & r\,\text{sen}\theta & 0\\ v\cos\alpha & v\,\text{sen}\alpha & 0\end{vmatrix}=$$

$$=m(rv\cos\theta\,\text{sen}\alpha-rv\,\text{sen}\theta\cos\alpha)\hat{k} = mrv(\cos\theta\,\text{sen}\alpha-\text{sen}\theta\cos\alpha)$$

$$=-mrv\,\text{sen}(\theta-\alpha)\hat{k} =-mrv\,\text{sen}\beta\hat{k} =-mv(r\,\text{sen}\beta)\hat{k} =-mvd\hat{k} = CTE$$

También, si $0\leq\alpha<90°$ y $180°\leq\alpha<270°$ entonces: $\vec{\ell}=-mvd\hat{k}$

si $90\leq\alpha<180°$ y $270\leq\alpha<360°$ entonces: $\vec{\ell}=mvd\hat{k}$

En este problema tenemos:

$$\vec{\ell}_1 = -m_1 v_{1i} d_1 \hat{k} = -(2kg)(20m/s)(0)\hat{k} = \vec{0}$$

$$\vec{\ell}_2 = -m_2 v_{2i} d_2 \hat{k} = -(8kg)(30m/s)(0.5m)\hat{k} = -(120kgm^2/s)\hat{k}$$

Luego: $\vec{L}(t=0) = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 = -(120kgm^2/s)\hat{k}$

Como: $\vec{L}(t) = CTE$, particularmente tenemos:

$\vec{L}(t=2s) = \vec{L}(t=8s) = \vec{L}(t=0) = -(120kgm^2/s)\hat{k}$

También tenemos que $U_{ext} = CTE$, $U_{int} = 0 = CTE$, por conservación de la energía mecánica tenemos:

$$E = K + U_{int} + U_{ext} = CTE \Rightarrow K = CTE$$

Luego: $K(t) = K(t=0)$, donde:

$K(t=0) = \frac{1}{2}m\ v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2}(2kg)(20m/s)^2 + \frac{1}{2}(8kg)(30m/s)^2 = 4000J.$

Particularmente: $K(t=2s) = K(t=82) = K(t=0) = 4000J.$

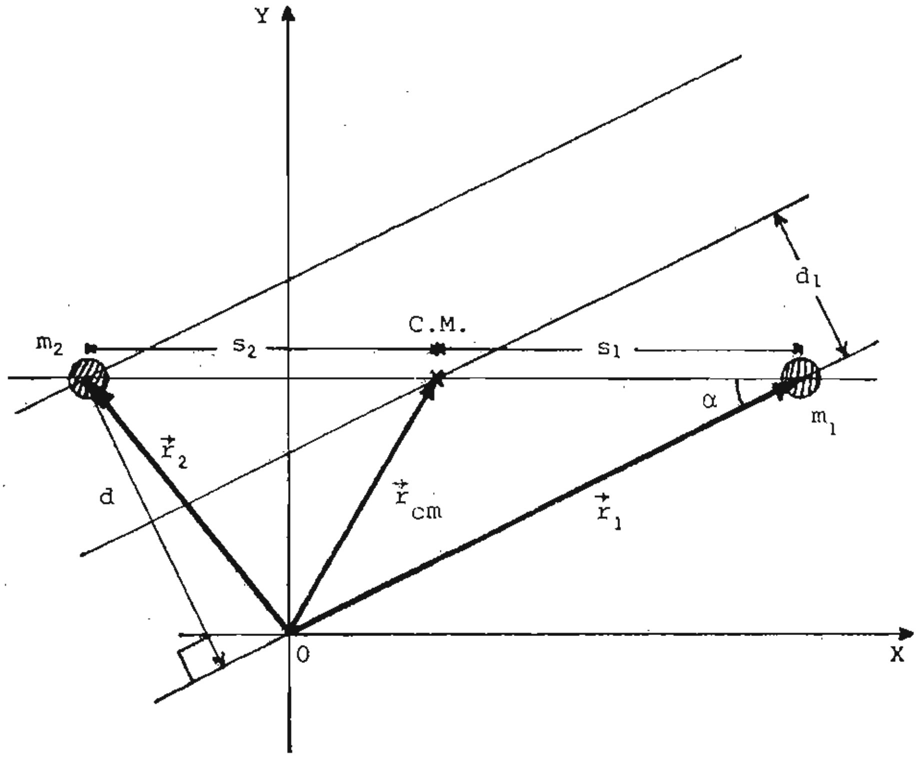
c) Tenemos que $v_{cm} = CTE$, tal que:

$$\vec{v}_{cm}(t=0) = \frac{m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i}}{m_1 + m_2} =$$

$$= \frac{(2kg)(20\cos 30°\hat{\imath} + 20\operatorname{sen} 30°\hat{\jmath}) + (8kg)(-30\cos 30°\hat{\imath} - 30\operatorname{sen} 30°\hat{\jmath})}{2kg + 8kg} =$$

$$= -(17.32m/s)\hat{\imath} - (10m/s)\hat{\jmath}.$$

Como $\vec{v}_{cm} = CTE$, su trayectoria es una recta colocada a una distancia d_1 de la recta de m_1, la cual se puede calcular de la siguiente forma:



De la figura tenemos:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{d_1}{s_1}$$

y: $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{d}{s_1+s_2}$, entonces: $\dfrac{d_1}{s_1} = \dfrac{d}{s_1+s_2} \Rightarrow d_1 = \dfrac{d}{1+\frac{s_2}{s_1}}$

De una de las propiedades geométricas del C.M. tenemos:

$\dfrac{s_2}{s_1} = \dfrac{m_1}{m_2}$, entonces: $d_1 = \dfrac{d}{1+\frac{m_1}{m_2}} = \dfrac{0.5m}{1+\frac{2kg}{8kg}} = 0.4m$

Entonces: $\vec{L}_{cm} = -Mv_{cm}d\ \hat{k} = CTE = -(10kg)\ \sqrt{(17.32)^2+(10)^2}\ (0.4m)\hat{k}$

$$= -(79.99kgm^2/s)\hat{k}$$

Como: $\vec{L}' = \vec{L} - \vec{L}_{cm} \Rightarrow \vec{L}' = CTE$, donde:

$$\vec{L}'(t=0) = \vec{L}(t=0) - \vec{L}_{cm}(t=0) = -(120kgm^2/s)\hat{k} - (-79.99kgm^2/s)\hat{k} =$$

$$= -(40.01kgm^2/s)\hat{k}$$

Particularmente: $\vec{L}'(t=2s) = \vec{L}'(t=8s) = \vec{L}'(t=0) = -40.01kgm^2/s)\hat{k}$

También temenos: $K' = k - k_{cm}$

Donde: $K_{cm} = \frac{1}{2}Mv^2_{cm} = \frac{1}{2}(10kg)[(17.32)^2+(10)^2] = 1999.91J$

Como: $K = CTE$ y $K_{cm} = CTE$, entonces: $K' = CTE$, particularmente: $K'(t=2s) = K'(t=8s) = 1999.91J$

Problema 14:

a) Como el choque es elástico, la conservación del momento lineal y de la energía cinética, las velocidades de las partículas después del choque son:

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} = \frac{0.2kg - 0.4kg}{0.2kg + 0.4kg}(1m/s) = -0.33m/s$$

$$v_{2f} = \frac{2m}{m_1 + m_2} v_{1i} = \frac{2(0.2kg)}{0.2kg + 0.4kg}(1m/s) = 0.66m/s$$

La velocidad angular ω de m_2 después del choque es:

$$\omega = \frac{v_{2f}}{r_o} = \frac{0.66m/s}{0.5m} = 1.33rad/s$$

b) Respecto de "0" tenemos:

$$\vec{L}_i = m_1 r_o v_{1i}\hat{k} \; ; \quad \vec{L}_f = (m_1 r_o v_{1f} + m_2 r_o v_{2f})\hat{k}$$

2. RESUMEN DE LA UNIDAD II. DÍNAMICA DEL CUERPO RÍGIDO

Definición: Cuerpo rígido

Un cuerpo rígido es un sistema de partículas de tal forma que la distancia entre ellas es constante en el tiempo.

Definición: Densidad de masa

El caso en que el número de partículas es tan grande y las distancias entre ellas son tan pequeñas que la apariencia macroscópica del cuerpo rígido es el de una distribución continua de masa se le llama sólido rígido, de tal forma que la masa dm de cualquier elemento de volumen dV del cuerpo esta dada por:

$$dm = \rho dV$$

donde $\rho = \rho(\vec{r})$ es una función escalar contínua que depende de la posición $\vec{r}$ de los puntos del cuerpo.

A $\rho = \rho(\vec{r})$ se le llama la densidad de masa del cuerpo.

2.1 CINEMÁTICA DEL MOVIMIENTO DEL CUERPO RÍGIDO

En un cuerpo rígido se observan tres tipos de movimiento:

i) Movimiento de traslación:

Es el movimiento en que todas las partículas del cuerpo describen trayectorias iguales.

El movimiento de traslación de un cuerpo rígido queda descrito por el movimiento de cualquiera de sus partículas, generalmente este punto es su C.M.

ii) Movimiento de rotación.

Es el movimiento de un cuerpo rígido en el cual todas sus partículas describen trayectorias circulares respecto de un eje común, con la misma velocidad angular.

El movimiento de rotación, respecto de un eje fijo en el espacio, de un cuerpo rígido queda descrito por el movimiento circular de cualquiera de sus partículas.

iii) Movimiento combinado:

Es el movimiento del cuerpo rígido obtenido de la combinación simultánea de los movimientos de traslación y de rotación.

La descripción de este movimiento se establece en tres etapas:

a) Se describe el movimiento de traslación por medio del movimiento del C.M.

b) Se describe el movimiento de rotación del cuerpo respecto del C.M.

c) Con ayuda de las ecuaciones de transformación de los parámetros cinemáticos y dinámicos entre un S.R. inercial y el C.M. se logra la descripción del movimiento del cuerpo rígido respecto del S.R. inercial.

Definición: El C.M. de un cuerpo rígido es el punto cuya posición es:

$$\vec{r}_{cm} \equiv \frac{1}{M} \int_{M} \vec{r} \rho dV$$

donde $\vec{r}$ es la posición del elemento de masa dm del cuerpo cuya masa es M y cuyo volumen es V.

Si la densidad de masa del cuerpo es ρ entonces: $dm=\rho dV$.

donde dV es el volumen del elemento de masa dm, por lo que:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \int_V \vec{r}\rho dV$$

Observación: Para el C.M. de un cuerpo rígido homogéneo (ρ=CTE) se observa que:

a) Si el cuerpo tiene simetría respecto de un plano, el C.M. del cuerpo es un punto de ese plano.

b) Si el cuerpo tiene simetría respecto de un eje, el C.M. del cuerpo es un punto de ese eje.

c) Si un cuerpo tiene simetría respecto de un punto, el C.M. del cuerpo es ese punto de simetría.

iv) Cinemática del movimiento del cuerpo rígido respecto de un eje fijo.

Este es un caso de particular importancia práctica, en el que todas las partículas del cuerpo rígido efectúan movimientos circulares en torno de un eje común y fijo; por eso se incluye aquí un resumen de la cinemática del movimiento circular. La dinámica del movimiento circular se incluye en la siguiente sección.

a) Parámetros cinemáticos del movimiento circular:

Posición: En coordenadas polares:

$$\Theta = \Theta(t) = \text{arctg}\ \frac{y}{x}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \text{CTE}$$

o bien: $x = r\cos\Theta$, $y = r\,\text{sen}\,\Theta$

Velocidad angular:
$$\omega(t) = \frac{d\Theta(t)}{dt}$$

Aceleración angular:

$$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d^2\Theta(t)}{dt^2}$$

b) Relaciones entre los parámetros angulares y lineales.

Tenemos: $s = r\Theta$

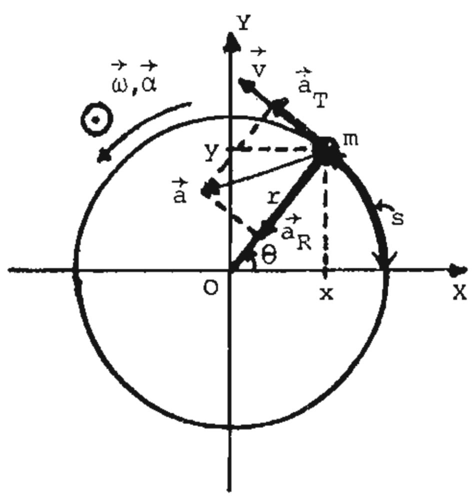
$$v = r\omega$$

c) Aceleración:

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_R$$

donde: $a_T = r\alpha$

y: $a_R = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$



2.2 DINÁMICA DEL MOVIMIENTO DEL CUERPO RÍGIDO

i) Dinámica del movimiento de traslación.

El movimiento de traslación queda determinado por la ecuación:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ext} \quad ó \quad M\vec{a}_{cm} = \vec{F}_{ext}$$

donde: $\vec{P} = M\vec{v}_{cm}$; $\vec{a}_{cm}$ y $\vec{v}_{cm}$ son la aceleración y la velocidad del C.M. del cuerpo de masa M.

Si el cuerpo rígido está aislado, es decir, $\vec{F}_{ext} = \vec{0}$; por lo tanto se debe cumplir:

$$\vec{P} = CTE \quad ó \quad \vec{a}_{cm} = \vec{0} \quad ó \quad \vec{v}_{cm} = CTE$$

Observaciones: Para un cuerpo rígido se tiene: $W_{int} = 0$, y por lo tanto: $\Delta K = W_{ext}$.

Para el movimiento de traslación del cuerpo rígido se tiene:

$$K = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2$$

Si las fuerzas externas son conservativas, entonces:

$$W_{ext} = \Delta U_{ext} = \Delta\left[\sum_{i=1}^{n} U_i\right]$$

Cuando el cuerpo rígido se mueve en un campo conservativo homogéneo (ejm: campo gravitacional, campo eléctrico uniforme, etc), la energía potencial U_{ext} del cuerpo coincide con la energía potencial de una partícula de masa M que se mueve en el C.M. del cuerpo; a ésta la denotaremos como U_{cm}, entonces:

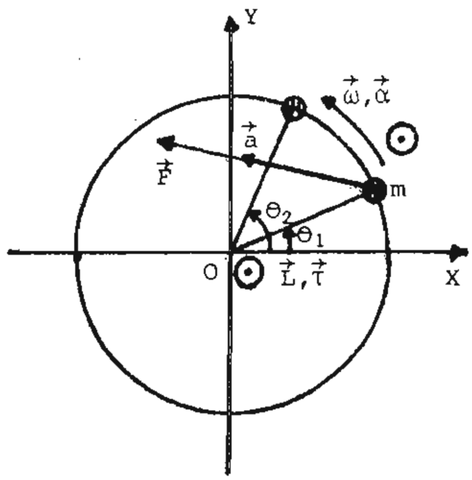
$$U_{ext} = U_{cm}$$

Luego, si las fuerzas externas son conservativas:

$$E = K + U_{cm} = CTE$$

ii) Dinámica del movimiento de rotación:

Se considera sólo el llamado movimiento plano del cuerpo rígido, el cual se obtiene para cuerpos girando en torno de un eje fijo en el espacio, con simetría tal que el momento angular del cuerpo coincida con la dirección del eje de rotación y que las torcas que actúan sobre el cuerpo tengan una resultante a lo largo del eje de rotación, de tal forma que los cambios del momento angular solo afectan a su magnitud o sentido pero no a su dirección. En este caso todas las partículas del cuerpo rígido efectúan movimientos circulares en torno de un eje común y fijo; por esta razón, se incluye a continuación un resumen de la dinámica del movimiento circular.



a) Para una partícula m efectuando un movimiento circular de radio r alrededor de un punto "O", a la cantidad:

$I \equiv mr^2 = CTE$ se le llama el momento de inercia de m, respecto de O.

b) Momento angular y Torca:

$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{\rho} = I\vec{\omega}$

$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d\vec{\ell}}{dt} = I\vec{\alpha}$

c) Conservación del momento angular:

Si $\vec{\tau} = \vec{0}$ entonces:

$$\vec{\ell} = I\vec{\omega} = CTE$$

como $I = CTE$, entonces $\vec{\omega} = CTE$

d) Trabajo:

$$W(\Theta_1 \rightarrow \Theta_2) = \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} \tau d\Theta$$

e) Energía cinética:

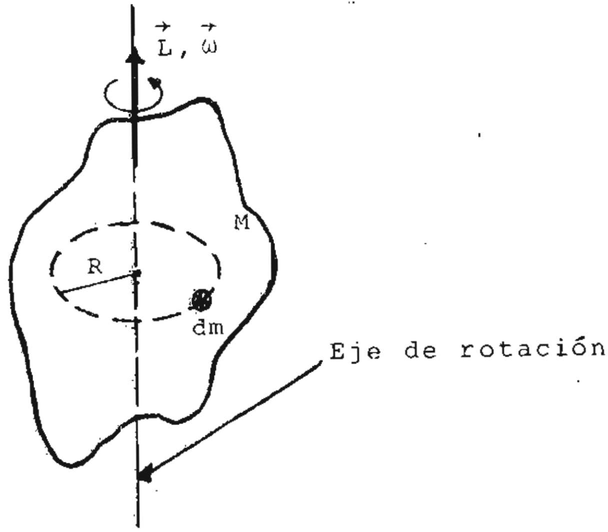
$$K = \frac{1}{2} mV^2 = \frac{1}{2} (mr^2)\omega^2$$

como: $I = mr^2$ entonces: $K = \frac{1}{2} I\omega^2$

De tal forma que para el cuerpo rígido se tiene en este caso: $\vec{L} = I\vec{\omega}$ en la dirección del eje de rotación.

donde: $I \equiv \int_M R^2 dm$

es el llamado momento de inercia del cuerpo de masa M y volumen V y R es la distancia del elemento de masa dm al eje de rotación.



Si la densidad de masa del cuerpo es ρ, entonces $dm = \rho dV$; por lo tanto:

$$I \equiv \int_V R^2 \rho dV$$

Para un cuerpo rígido girando respecto de un eje fijo se tiene que I = CTE y por lo tanto:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_{ext} \Longrightarrow \frac{d\vec{L}}{dt}(I\vec{\omega}) = I\vec{\alpha} = \vec{\tau}_{ext}$$

si $\vec{\tau}_{ext} = 0$, entonces $\vec{L} = I\vec{\omega}$ = CTE, por lo que $\vec{\omega}$ = CTE.

Por otro lado, la energía cinética de un cuerpo rígido girando en torno de un eje fijo con velocidad angular ω es:

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2$$

Observaciones respecto del momento de inercia:

a) Teorema de los ejes paralelos:

Sea I_{cm} el momento de inercia de un cuerpo rígido con respecto a un eje fijo que pasa por su C.M. y sea I_p el momento de inercia respecto de un eje paralelo al anterior a una distancia h, entonces se cumple:

$$I_p = I_{cm} + Mh^2$$

Donde M es la masa del cuerpo.

b) Teorema de los ejes perpendiculares:

Consideremos un cuerpo plano colocado en el plano xy de un S.R. dado; supongamos que I_x, I_y, I_z son su momento de inercia respecto de los ejes x, y, z respectivamente, entonces se cumple:

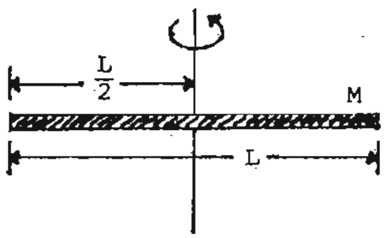
$$I_z = I_x + I_y$$

c) Radio de giro:

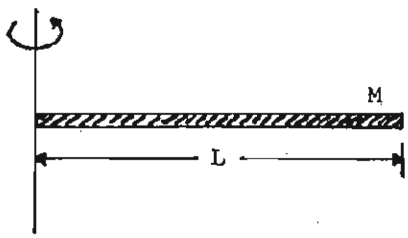
Sea I el momento de inercia de un cuerpo rígido respecto de un eje dado, se define el radio de giro k del cuerpo respecto de ese eje como:

$$k \equiv \sqrt{\frac{I}{M}} \quad ó \quad I = k^2 M \ .$$

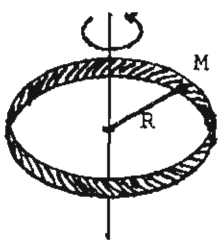
d) Ejemplos de momentos de inercia:



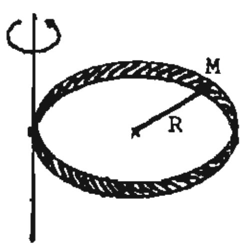
Varilla: $I = \frac{1}{12} ML^2$



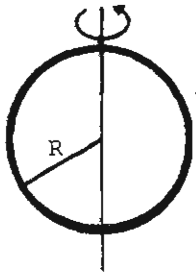
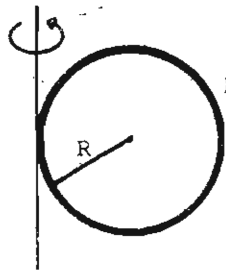
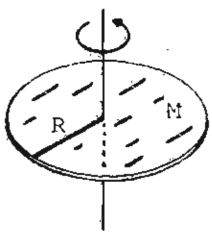
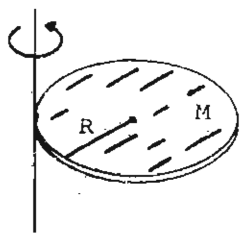
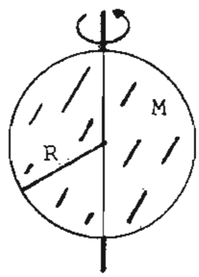
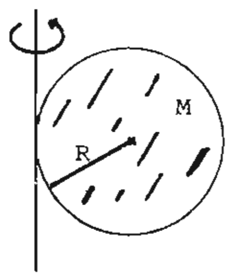
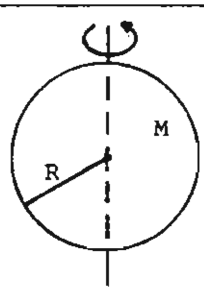
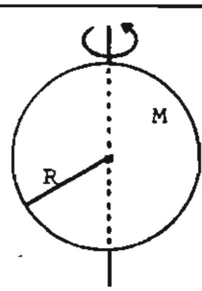
Varilla: $I = \frac{1}{3} ML^2$

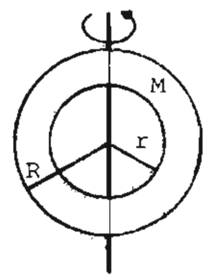


Aro Circular: $I = MR^2$

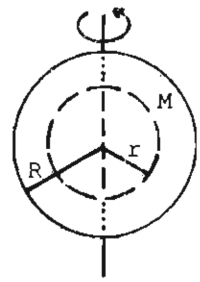


Aro Circular: $I = 2MR^2$

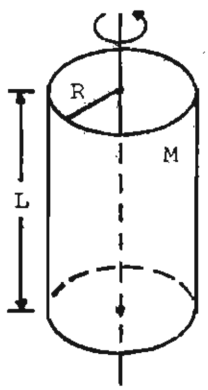
 Aro Circular: $I = \frac{1}{2}MR^2$	 Aro Circular: $I = \frac{3}{2}MR^2$
 Disco Circular: $I = \frac{1}{2}MR^2$	 Disco Circular: $I = \frac{3}{2}MR^2$
 Disco Circular: $I = \frac{1}{4}MR^2$	 Disco Circular: $I = \frac{5}{4}MR^2$
 Cascarón Esférico: $I = \frac{2}{3}MR^2$	 Esfera Sólida: $I = \frac{2}{5}MR^2$



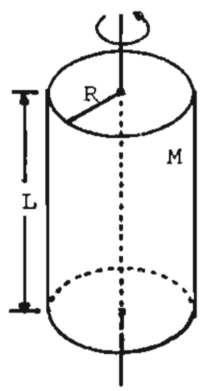
Disco
Anular: $I = \frac{1}{2}M\,(r^2 + R^2)$



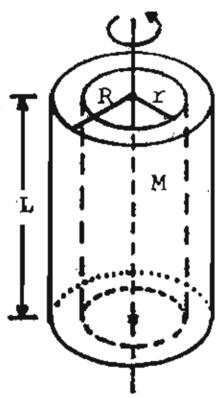
Casquete
Esférico: $I = \frac{2}{5}M\,\frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}$



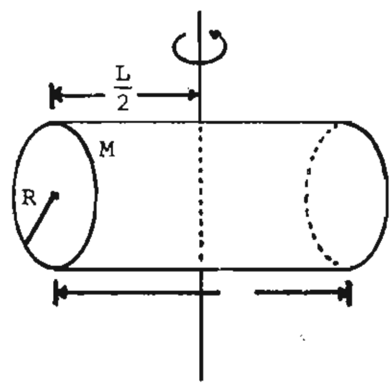
Pared
Cilíndrica: $I = MR^2$



Cilindro
Sólido: $I = \frac{1}{2}MR^2$



Cilindro
Anular: $I = \frac{1}{2}M\,(r^2 + R^2)$



Cilindro
Sólido: $I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$

iii) Dinámica del movimiento combinado. Rodamiento puro.

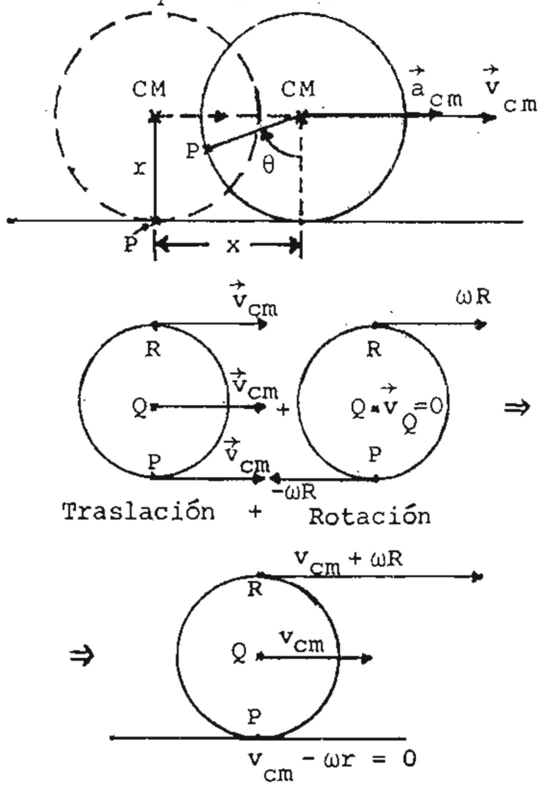
En el movimiento combinado se establece el movimiento de traslación para el C.M. y el movimiento de rotación respecto de un eje que pasa por el C.M. y se utilizan las ecuaciones de transformación, para los diferentes parámetros dinámicos, entre un S.R. inercial y el S.R. del C.M.; entre otras:

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_{cm} + \vec{\tau}\,' = \vec{r}_{cm} \times \vec{F} + I\vec{\alpha}$$

$$\vec{L} = \vec{L}_{cm} + \vec{L}\,' = \vec{r}_{cm} \times \vec{P} + I\vec{\omega}$$

y: $$K = K_{cm} + K' = \tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2$$

Aparte se usan las siguientes condiciones para el movimiento de rotación sin resbalamiento o rodamiento puro de un cuerpo rodante:



$$x = r\theta$$

$$v_{cm} = r\omega$$

$$a_{cm} = r\alpha$$

Para cualquier punto del cuerpo se tiene:

$$\vec{v} = \vec{v}_T + \vec{v}_R$$

En particular:

$$v_R = \omega r + \omega r = 2\omega r = 2v_{cm}$$

$$v_Q = \omega r + 0 = \omega r = v_{cm}$$

$$v_P = \omega r - \omega r = 0$$

PROBLEMAS DE LA UNIDAD II DE DINÁMICA

1. Un cilindro de masa M y radio r parte del reposo en el punto A y rueda sin resbalar por la pista que se muestra en la figura 1, calcular: (a) la velocidad angular de la esfera en el punto B; (b) la altura máxima que alcanza al abandonar la pista, y (c) la energía cinética en el punto C.

2. Un cascarón esférico de masa M y radio r rueda sin resbalar por una pista como se muestra en la figura 2. Si comienza del reposo a una altura H de la mesa, la cual abandona horizontalmente a una altura h del suelo, calcular: (a) la velocidad del C.M. del cascarón y la velocidad angular cuando este llega a tocar el suelo, (b) las energías cinética de rotación y de traslación del cascarón para el caso del inciso (a).

3. Un pequeño disco de radio r y masa M rueda sin resbalar en el interior de un gran hemisferio de radio R cuyo eje de simetría es vertical como se muestra en la figura 3. A partir del reposo se suelta en la parte superior, calcular: (a) la energía cinética en el fondo; (b) la energía cinética de traslación y de rotación en el fondo; (c) la fuerza normal que ejerce el disco sobre el hemisferio cuando está en el fondo.

4. Una esfera de radio r y masa M parte del reposo y rueda sin deslizar sobre una rampa la cual abandona en el punto Q como se muestra en la figura 4. Posteriormente, la masa m fue disparada con velocidad v_0 (sin rotación) y choca con M en el

punto en el cual alcanza su máxima altura, calcular: (a) la altura máxima que alcanza M, (b) la velocidad v_0 que se le imprimió a m para que se efectúe el choque.

5. Una esfera pequeña de radio b y masa M rueda sin resbalar hacia abajo de un plano inclinado de ángulo β y sobre una pista circular de radio a como se muestra en la figura 5. Suponiendo que la esfera parte del reposo en la parte superior, calcular: (a) la velocidad angular de la esfera cuando llega al fondo del plano inclinado; (b) demuestre que si a>>b, entonces la esfera llegará al punto A, a condición de que se satisfaga la desigualdad $H \geq \frac{27}{10}$ a.

6. La rueda de la figura 6, tiene un radio R y una masa M y puede girar con respecto a un eje horizontal. Una cuerda enrollada alrededor de ella tiene un bloque de masa m suspendida de su extremo libre, calcular: (a) la aceleración angular de la rueda, (b) la aceleración del bloque, y (c) la tensión en la cuerda. Haga un diagrama de cuerpo libre para cada uno de los cuerpos que componen el sistema de la figura.

7. La figura 7 muestra dos bloques de masas m_1 y m_2 unidos por una cuerda inextensible. La cuerda pasa a través de una polea en forma de disco de masa M y radio R y no resbala sobre ella. Calcular: (a) la aceleración que tiene cada uno de los bloques; (b) la aceleración angular de la polea, y (c) la tensión en la cuerda. Haga un diagrama de cuerpo libre para cada uno de los cuerpos que componen el sistema en la figura.

8. En la figura 8 se muestra un cilindro de radio R y masa M que tiene enrollada una cuerda. La cuerda pasa através de una polea y en su extremo libre se encuentra suspendido un bloque de masa m. Si el cilindro rueda sin resbalar, y se desprecia el efecto de la polea, calcular: (a) la aceleración del C.M. del cilindro; (b) la aceleración del bloque; (c) la aceleración angular del cilindro. Haga un diagrama de cuerpo libre de cada uno de los cuerpos que componen el sistema de la figura.

9. En la figura 9 se muestra una polea formada por dos discos de radios r y R y de masas m_1 y m_2 respectivamente. Los discos se encuentran pegados y la polea así formada puede girar alrededor de un eje horizontal. En cada disco se encuentra enrollada una cuerda, cada una de las cuales en su extremo libre tiene suspendido un bloque, calcular: (a) la aceleración angular de la polea, (b) la aceleración de m_3 y de m_4; (c) la tensión en cada cuerda. Haga un diagrama de cuerpo libre de cada uno de los cuerpos que componen el sistema de la figura.

10. Una cuerda está enrollada en un cilindro de masa M y radio R como se muestra en la figura 10. La cuerda se jala verticalmente hacia arriba para impedir que descienda el C.M. del cilindro conforme se esta desenrollando la cuerda, calcular: (a) la tensión en la cuerda; (b) el trabajo que se ha hecho sobre el cilindro una vez que ha alcanzado una velocidad angular ω; (c) la longitud de la cuerda que se ha desenrollado en ese momento .

11. Una regla de longitud L y masa M descansa sobre una mesa horizontal lisa. Un disco de masa m se mueve como se muestra en la figura 11 con velocidad v_0 y choca con la regla. Si después del choque el disco permanece en reposo, calcular: (a) la velocidad del C.M. de la regla después del choque, (b) la velocidad angular de la regla con respecto a su C.M. (c) el cambio en la energía cinética del sistema. ¿Qué tipo do choque es?

12. Una regla de longitud L y masa M descansa sobre una mesa horizontal lisa. Un disco de masa m se mueve como se muestra en la figura 12 con velocidad v_0 y choca contra la regla. Si después del choque el disco rebota en la misma dirección que tenía antes de chocar con velocidad v_f, calcular: (a) la velocidad del C.M. de la regla; (b) la velocidad angular de la regla con respecto a su C.M.; (c) el cambio en la energía cinética del sistema. ¿Qué tipo de choque es?

13. Una varilla de longitud L y masa M descansa sobre una mesa horizontal sin fricción. Un disco de hockey de masa m se va moviendo como se muestra en la figura 13, con una velocidad v_0 y choca elásticamente contra la varilla. Calcular: (a) la masa m del disco para que quede en reposo inmediatamente después del choque; (b) la velocidad del C.M. de la varilla, y (c) la velocidad angular de la varilla con respecto a su C.M.

14. Una regla de longitud L y masa M puede rotar libremente alrededor de un pivote A como se muestra en la figura 14. Una bala de masa m y velocidad v_0 golpea la regla a una distancia a respecto del punto A y se incrusta en ella, calcular: (a) la velo-

cidad angular del nuevo cuerpo formado con respecto al punto A; (b) el momento lineal antes y después de la colisión; (c) la distancia a la cual debe chocar la bala en la regla para que el momento lineal se conserve; y (d) el cambio en la energía cinética del sistema.

15. La varilla de la figura 15 cuya longitud es L y cuya masa es M, puede rotar libremente en un plano vertical alrededor de su extremo A. Inicialmente se coloca en una posición horizontal y luego se suelta. Cuando hace un ángulo Θ con la vertical, calcular: (a) su aceleración angular, (b) su velocidad angular, y (c) las componentes de la fuerza en el punto de suspensión.

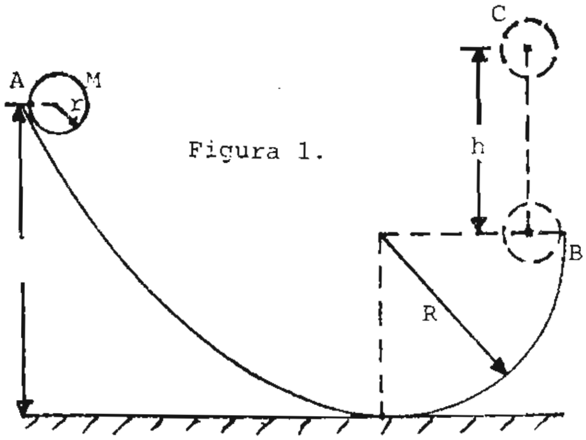


Figura 1.

$M = 100$ gr; $R = 15$ cm.
$r = 2$ cm. ; $H = 45$ cm.

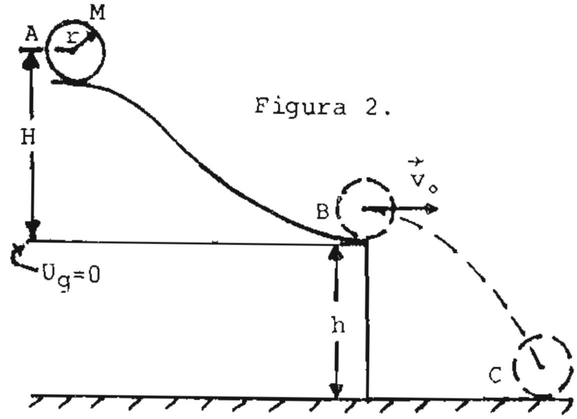


Figura 2.

$M = 10$ kg. ; $H = 1.4$ m.
$r = 2$ cm. ; $h = 1$ m.

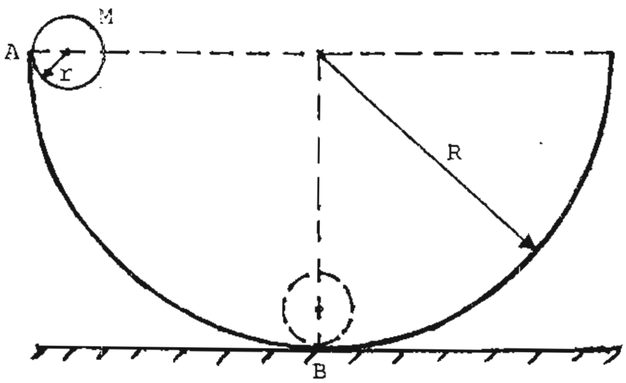


Figura 3.

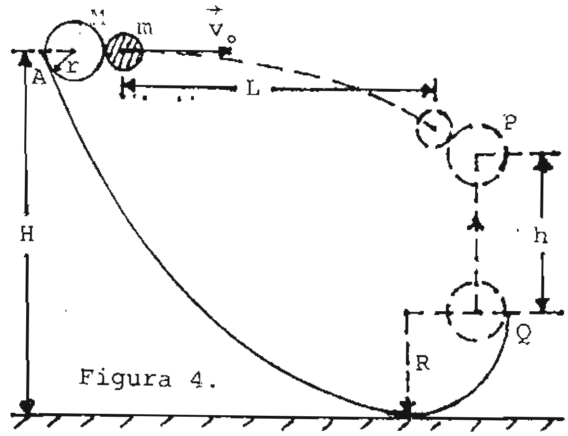


Figura 4.

$M = 5$ kg. ; $r = 10$ cm. ; $H = 7$ m.
$m = 1$ kg. ; $L = 5$ m. ; $R = 2.5$ m.

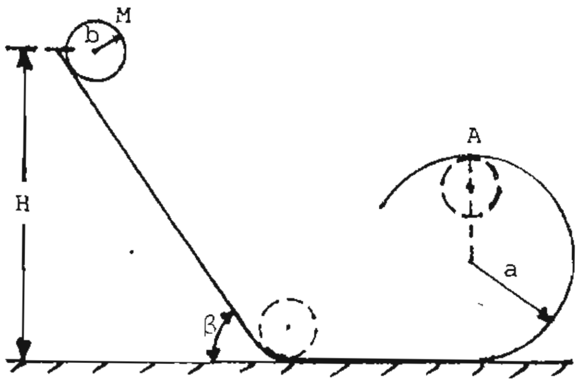


Figura 5.

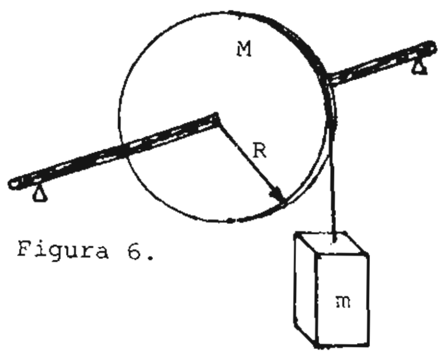


Figura 6.

$M = 25$ kg.; $m = 10$ kg.; $R = 0.5r$

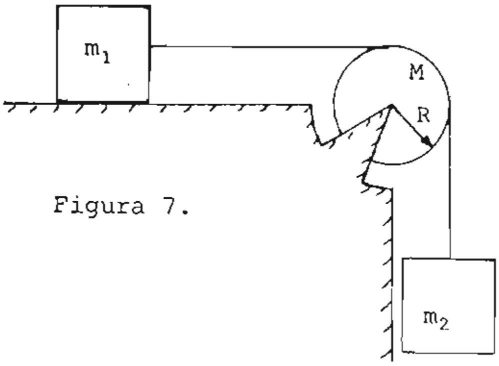


Figura 7.

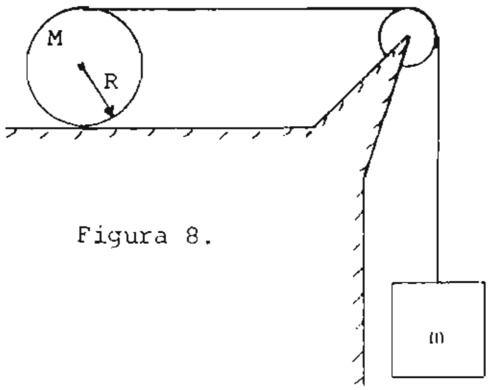


Figura 8.

$m_1 = 50$ kg.; $m_2 = 200$ kg,
$M = 15$ kg.; $R = 20$ cm.

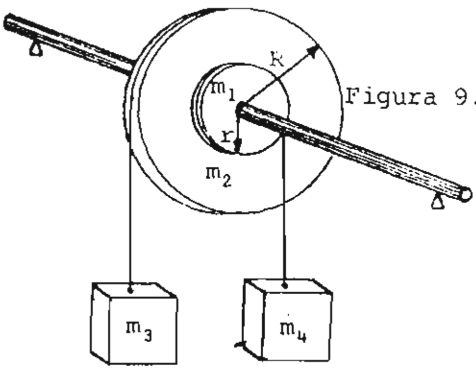


Figura 9.

$m_1 = 500$ gr. ; $R = 8$ cm.
$m_2 = 300$ gr. ; $r = 6$ cm.
$m_3 = 1600$ gr.; $m_4 = 1500$ gr.

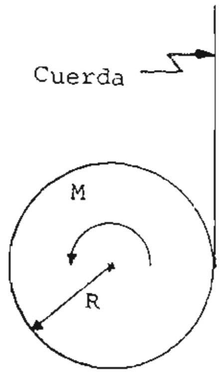


Figura 10.

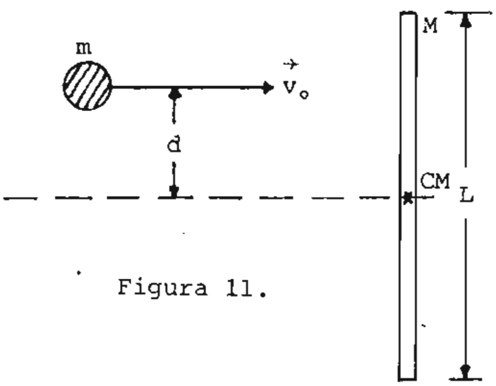


Figura 11.

$M = 6$ kg. ; $L = 3$ m.
$m = 1.5$ kg.; $d = 75$ cm.
$v_o = 12$ m/s.

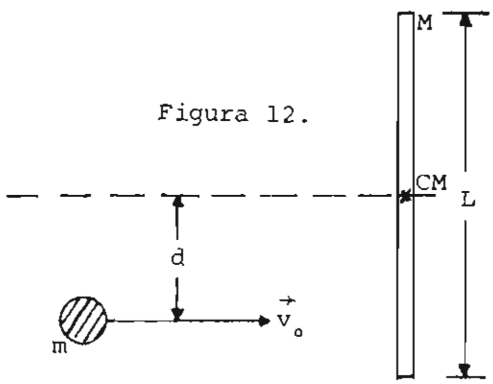


Figura 12.

$M = 8$ kg. ; $L = 4$ m.
$m = 2$ kg. ; $d = 1$m.
$v_o = 16$ m/s ; $v_f = 8$ m/s

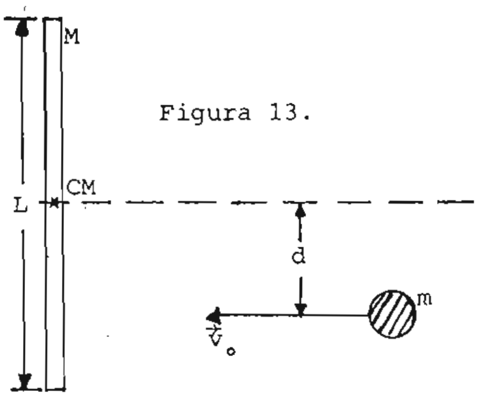


Figura 13.

$M = 4$ kg.; $v_o = 20$ m/s
$L = 3$ m. ; $d = 0.75$ m.

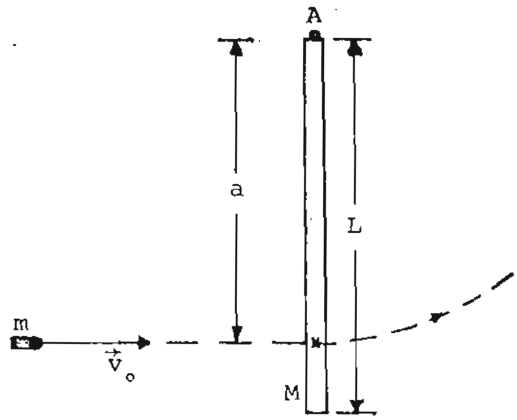


Figura 14.

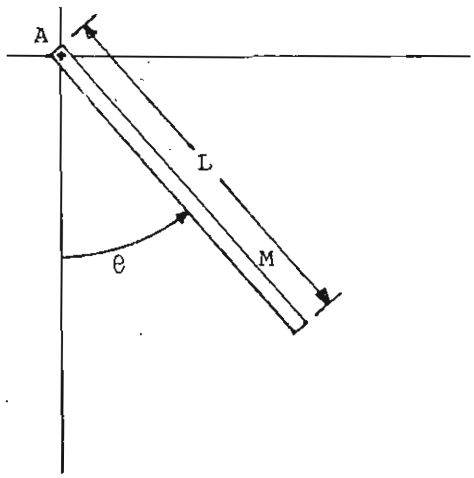


Figura 15.

SOLUCIÓN A LOS PROBLEMAS DE LA UNIDAD II DE DINÁMICA

Problema 1:

a) Como la esfera tiene rodamiento puro, tenemos que el trabajo hecho por la fuerza de fricción es cero y además $v = \omega R$ en cualquier posición de la esfera (excepto en el trayecto BC) $\therefore$ utilizaremos la conservación de la energía entre A y B con el nivel de energía potencial cero en el piso.

$E_A = Mgh$

$E_B = MgR + \frac{1}{2}Mv_B^2 + \frac{1}{2}I'\omega_B^2 = MgR + \frac{1}{2}Mv_B^2 + \frac{1}{2}(\frac{2}{5}Mr^2)\frac{v_B^2}{r^2} = MgR + \frac{7}{10}Mv_B^2$

Igualando y despejando v_B, tenemos:

$$v_B = \sqrt{\frac{10}{7}(H-R)}$$

y:

$$\omega_B = \frac{v_B}{R} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{10}{7}g(H-R)}$$

b) La altura h que alcanza la esfera, la podemos encontrar utilizando la conservación de la energía ahora entre B y C con el nivel de energía potencial cero en el C.M. de B.

$$E_B = \frac{1}{2}Mv_B^2 + \frac{1}{2}I\omega_B^2$$

$$E_C = \frac{1}{2}I\omega_C^2 + Mgh$$

Igualando tenemos:

$$\frac{1}{2}Mv_B^2 = Mgh \quad \text{ó} \quad v_B^2 = 2gh$$

ya que $\omega \equiv$ CTE en el trayecto BC. Finalmente tenemos:

$$h = \frac{v_B^2}{2g} = \frac{5}{7}(H-R)$$

c) Para encontrar la energía cinética en el punto B, utilizamos la conservación de la energía entre B y C colocando nuestro nivel de referencia de energía potencial cero en el piso; de esta forma:

$$E_B = MgR + \frac{7}{10}M\left(\frac{10}{7}g(H-R)\right) = MgH \equiv E_A$$

y: $$E_C = mg(R+h) + K_C$$

Igualando y despejando K_C, se tiene:

$$K_C = MgH - Mg(R+h) = Mg[H-R-h]$$

$$= Mg[H-R-\frac{5}{7}H+\frac{5}{7}R]$$

$$\therefore K_C = \frac{2}{7}Mg(H-R)$$

Note que K_C es solamente energía cinética de rotación ya que en el punto C se tiene $v_C = 0$ y entonces no hay energía cinética de traslación.

Problema 2:

a) Como el movimiento es con rodamiento puro(excepto después de que abandona la mesa), utilizaremos conservación de la energía mecánica.

Necesitamos conocer la velocidad del C.M. y la velocidad angular del cascarón antes de que abandone la mesa (punto B).

La energía mecánica en el punto A es:

$$E_A = MgH$$

y en B:

$$E_B = Mgr + \tfrac{1}{2}Mv_o^2 + \tfrac{1}{2}I'\omega_o^2 = Mgr + \tfrac{1}{2}Mv_o^2 + \tfrac{1}{2}(\tfrac{2}{3}Mr^2)\frac{v_o^2}{r^2} =$$

$$= Mgr + \frac{5}{6}Mv_o^2$$

Igualando las energías mecánicas y despejando v_o, tenemos:

$$v_o = \sqrt{\frac{6}{5}g(H-r)}$$

y:

$$\underline{\omega_o = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{6}{5}g(H-r)}}$$

Primeramente, la velocidad angular del cascarón cuando llega al piso es ω_o ya que después de que abandona la mesa, la única fuerza externa que actúa es su peso y entonces $\vec{\tau}' = 0$ y $\omega \equiv CTE$.

De la conservación de la energía entre B y C y quitando la energía cinética de rotación se tiene:

$$\tfrac{1}{2}Mv_o^2 + Mgh = \tfrac{1}{2}Mv_C^2$$

$$\Rightarrow \underline{v_C = \sqrt{v_o^2 + gh}}$$

b)

$$K_R = \tfrac{1}{2}I'\omega_o^2 = \tfrac{1}{2}(\tfrac{2}{3}Mr^2)\omega_o^2$$

$$= \frac{1}{3}Mr^2\frac{1}{r^2}\,\frac{6}{5}g(H-r)$$

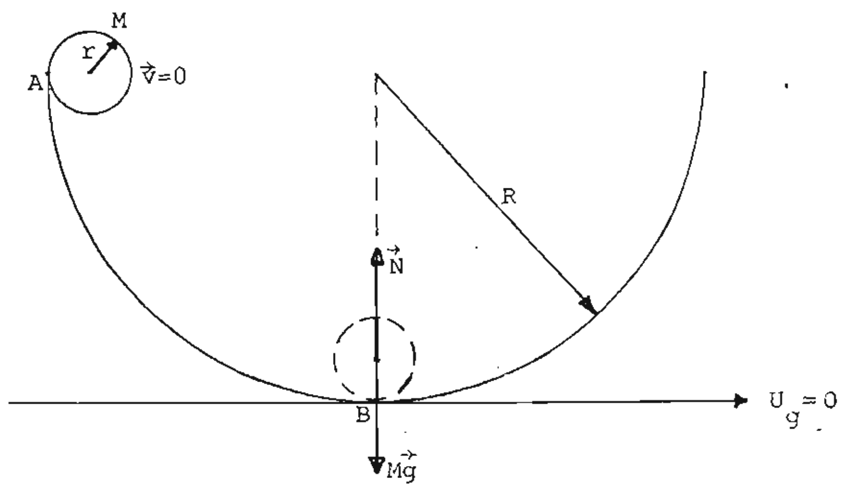
$$\Rightarrow \underline{K_R = \frac{2}{5}Mg(H-r)}$$

$$K_T = \tfrac{1}{2}Mv_C^2 = \tfrac{1}{2}M(v_o^2 + gh)$$

$$= \frac{1}{2}M[\frac{6}{5}g(H-r)+gh]$$

$$\Rightarrow \underline{K_T = \frac{1}{2}Mg[\frac{6}{5}(H-r)+h]}$$

Problema 3:



a) De la conservación de la energía entre A y B tenemos:

$$E_A \equiv MgR = Mgr+K \equiv E_B$$

$$\Rightarrow \qquad K = Mg(R-r)$$

b) Del inciso anterior:

$$Mg(R-r) = K = \frac{1}{2}Mv_B^2+\frac{1}{2}I'\omega_B^2 = \frac{1}{2}Mv_B^2+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}Mr^2)\frac{v_B^2}{r^2}$$

$$\Rightarrow \qquad K = \frac{3}{4}Mv_B^2 = Mg(R-r)$$

$$\therefore \quad v_B^2 = \frac{4}{3}g(R-r) \text{ y } \omega_B^2 = \frac{v_B^2}{r^2} = \frac{4}{3}g\frac{(R-r)}{r^2}$$

y: $$K_T = \frac{1}{2}Mv_B^2 = \frac{1}{2}M\frac{4}{3}g(R-r) \Rightarrow \underline{K_T = \frac{2}{3}Mg(R-r)}$$

$$K_R = \frac{1}{2}I'\omega_B^2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}Mr^2)\frac{4}{3}g\frac{(R-r)}{r^2} \Rightarrow \underline{K_R = \frac{1}{3}Mg(R-r)}$$

c) La fuerza que ejerce el disco sobre el hemisferio es igual en magnitud pero en sentido contrario a la fuerza ($\vec{N}$ de la figura) que ejerce el hemisferio sobre el disco (3a. Ley de Newton).

En el punto B de la figura, se tiene:

$$N-Mg = \frac{Mv_B^2}{(R-r)}$$

$$N=Mg + \frac{M}{(R-r)}\,\frac{4}{3}g(R-r)$$

$$\therefore \quad \underline{N = \frac{7}{3}Mg}$$

Problema 4:

a) Utilizando la conservación de la energía mecánica para M entre los puntos A y Q y colocando el nivel de referencia de energía potencial cero en el piso, se tiene:

$$E_A = MgH = \frac{1}{2}Mv_Q^2+\frac{1}{2}I'\omega_Q^2+MgR \equiv E_Q; \text{ pero } v_Q = \omega_Q r \text{ y } I' = \frac{2}{5}Mr^2$$

$$\Rightarrow \quad MgH-MgR = \frac{1}{2}[Mv_Q^2+\frac{1}{2}(\frac{2}{5}Mr^2)\;\frac{v_Q^2}{r^2}]$$

$$\Rightarrow \quad Mg(H-R) = \frac{7}{10}Mv_Q^2 \;\therefore\; v_Q^2 = \sqrt{\frac{10}{7}g(H-R)}$$

Cuando M sale de la rampa en el punto Q, $\omega \equiv$ CTE puesto que la única fuerza externa que actúa sobre él es su peso y

$\therefore \ \tau'_{ext} = 0$.

De la conservación de la energía mecánica entre Q y P con $v_P = 0$ y $K_{QR} = K_{PR}$ para la energía cinética de rotación, se tiene:

$$E_Q = E_A = MgH = Mg(R+h) = E_P$$

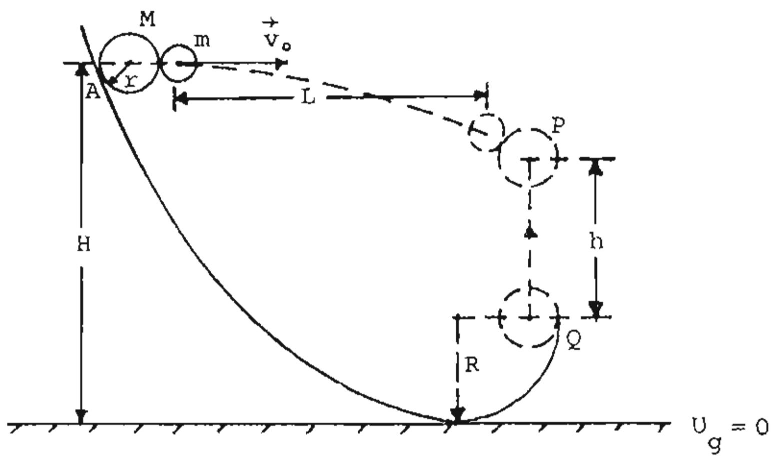
$$E_Q = \tfrac{1}{2}Mv_Q^2 + K_{QR} + MgR = K_{PR} + Mg(R+h)$$

$$\Rightarrow \quad \tfrac{1}{2}M\left(\tfrac{10}{7}g(H-R)\right) = Mg(R+h)$$

$$\Rightarrow \quad \tfrac{5}{7}(H-R) = R+h \ \Rightarrow \ h = \tfrac{5}{7}H - \tfrac{5}{7}R - R$$

$$\therefore \ \underline{h = \tfrac{1}{7}(5H-12R)}$$

b)



La partícula m se mueve en una parábola, cuya ecuación es:

$$(y-y_o) = v_o \tan\theta(x-x_o) - \frac{g}{2v_o^2\cos^2\theta}(x-x_o)^2$$

donde (x_o,y_o) son las coordenadas del punto inicial en el cual sale disparada la partícula; $\theta = 0$ ya que la velocidad con que se dispara es horizontal.

Para asegurar que se efectúa el choque entre m y M, debemos exigir que el punto $(L, \frac{5}{7}(H-R))$ que corresponde al punto P de la figura satisfaga la ec. de la parábola, esto es:

$$(x_o,y_o) = (0,H)$$

entonces, de la ecuación de la trayectoria, se tiene:

$$\frac{5}{7}(H-R)-H = -\frac{g}{2v_o^2(1)}(L-0)$$

$$\Rightarrow\ +\frac{2}{7}H + \frac{5}{7}R = \frac{g}{2v_o^2}L^2$$

$$2v_o^2 = \frac{gL^2}{\frac{1}{7}(2H+5R)} \Longrightarrow 2v_o^2 = \frac{7gL^2}{(2H+5R)}$$

$$\therefore\quad v_o = \sqrt{\frac{7gL^2}{2(2H+5R)}}$$

Problema 5:

a) Utilizando la conservación de la energía entre C y B se tiene:

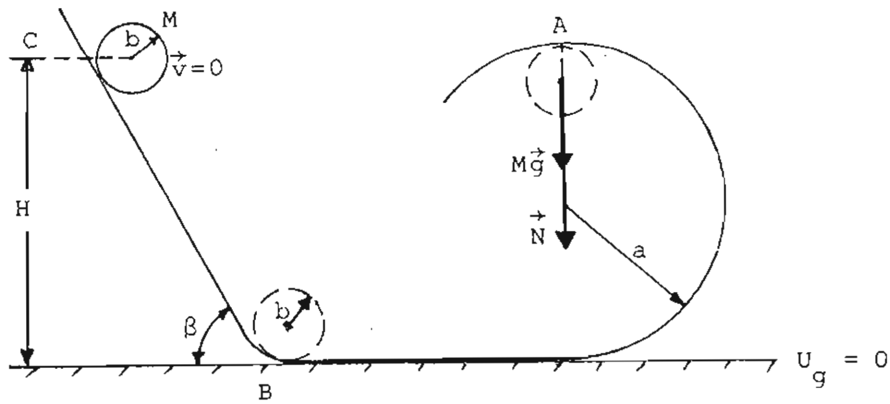
$$E_C \equiv MgH = \frac{1}{2}Mv_B^2+\frac{1}{2}I'\omega_B^2+Mgb \equiv E_B$$

pero: $$v_B^2 = \omega_B^2 b^2 \quad y \quad I' = \frac{2}{5}Mr^2$$

$$\Rightarrow MgH = \frac{1}{2}Mv_B^2+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}Mb^2\right)\frac{v_B^2}{b^2}+Mgb$$

$$MgH = \frac{1}{2}Mv_B^2+\frac{1}{5}Mv_B^2+Mgb$$

$$\therefore \quad v_B = \sqrt{\frac{10}{7}g(H-b)} \quad y \quad \omega_B = \frac{v_B}{b} = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{10}{7}g(H-b)}$$



b) En el punto A tenemos que:

$$Mg+N = Mv_A^2/(a-b)$$

para que la esfera llegue al punto A se tiene que $\vec{N} = 0$

$\Rightarrow Mv_A^2 = Mg(a-b)$ o $v_A^2 \geq g(a-b)$ con lo que se asegura todavía más que la esfera llega al punto A o se sigue.

Ahora bien, de la conservación de la energía entre C y A tenemos:

$$E_C = MgH = \frac{1}{2}Mv_A^2+\frac{1}{2}I\omega_A^2+Mg(2a-b) = E_A$$

$$\Rightarrow MgH = \frac{1}{2}Mv_A^2+ \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}Mb^2\right)\frac{v_A^2}{b^2}+Mg(2a-b)$$

$$\Longrightarrow Mg(H-2a+b) = \frac{7}{10}Mv_A^2$$

$$\therefore\ v_A^2 = \frac{10}{7}g(H-2a+b)$$

entonces: $\frac{10}{7}g(H-2a+b) \geq g(a-b)$, pero $b \ll a$

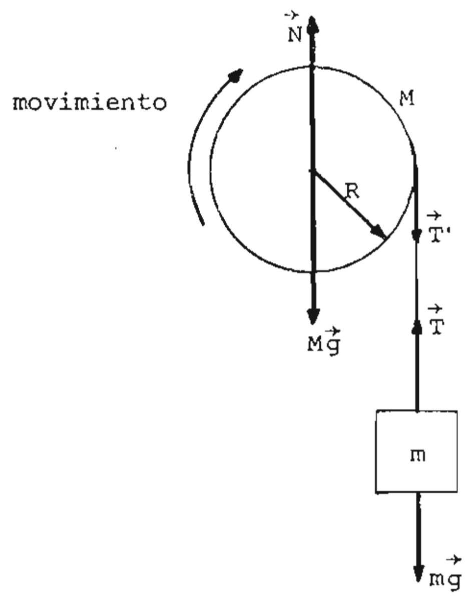
$$\Longrightarrow \frac{10}{7}(H-2a) \geq a$$

$$H-2a \geq \left(\frac{7a}{10}\right)$$

$$H \geq \left(\frac{7}{10}+2\right)a = \frac{27}{10}a$$

$$\therefore\ \underline{H \geq \left(\frac{27}{10}\right)a}$$

Problema 6:



De acuerdo al diagrama de cuerpo libre de cada uno de los cuerpos y a las ecuaciones de traslación y rotación se tiene:

Rueda: $N-Mg = 0$. equilibrio de traslación

$TR = I\alpha$. rotación

masa: $-T + mg = ma$

ec. constitutiva: $a = \alpha R$

El anterior sistema de 4 ecuaciones contiene 4 incógnitas: N, T, α, a.

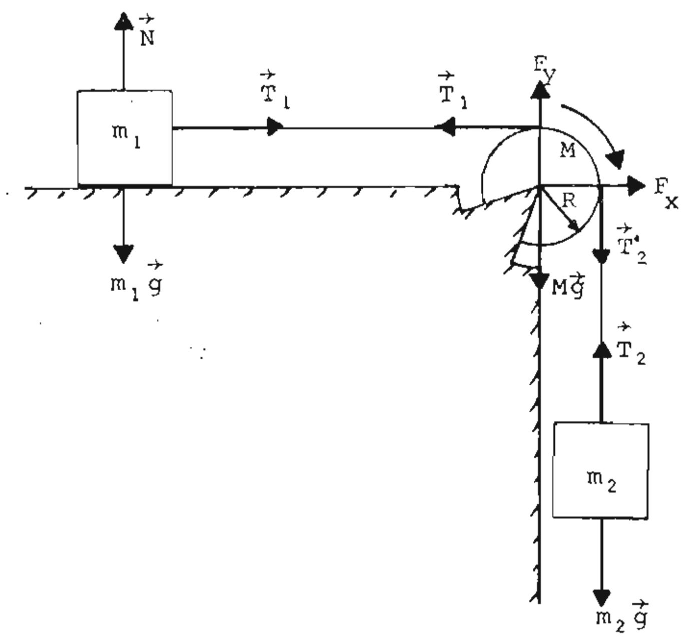
Resolviendo el sistema se tiene:

a) $\alpha = \dfrac{g/R}{(1+I/mR^2)}$; puede usted tomar $I = \frac{1}{2}mR^2$

b) $a = \dfrac{g}{(1+I/mR^2)}$

c) $T = \dfrac{\left(2+\frac{I}{mR^2}\right)}{(1+I/mR^2)}\, mg$

Problema 7:



Del diagrama de cuerpo libre de la figura y de las ecuaciones de movimiento para traslación y rotación:

$$\vec{F}_R = m\vec{a}; \text{ partícula}$$

$$\vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm} \text{ y } \tau' = I'\alpha; \text{ cuerpo rígido}$$

se tiene:

Bloque 1: $N - m_1 g = 0$

$T_1 = m_1 a$

bloque 2: $m_2 g - T_2 = m_2 a$

Las aceleraciones de m_1 y m_2 son iguales puesto que la cuerda es inextensible. Las tensiones son diferentes porque ahora consideramos el efecto de la polea.

Polea: $F_y - Mg - T = 0$

$Fx - T_1 = 0$; equilibrio de traslación.

$I\alpha = T_2 R - T_1 R$; rotación.

ec. constitutiva: $a = \alpha R$; debido a que la cuerda no resbala sobre la polea.

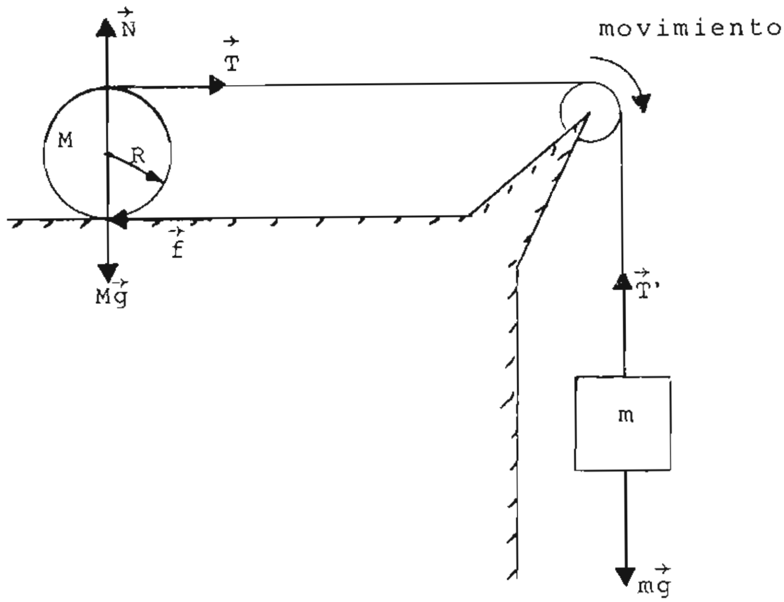
Todas las anteriores 7 ecuaciones contienen 7 incógnitas: N, T_1, a, T_2, Fy, Fx y α, las cuales se pueden resolver, obteniéndose.

a) $a = \dfrac{m_2}{(\frac{I}{R^2} + m_2 + m_1)} g$; $I = \frac{1}{2}MR^2$

b) $\alpha = \dfrac{m_2/R}{(\frac{I}{R^2} + m_1 + m_2)} g$

c) $T_1 = \dfrac{m_2}{(\frac{I}{R^2} + m_1 + m_2)} m_1 g$ y $T_2 = \dfrac{(\frac{I}{R^2} + m_1 + m_2) - m_2}{(\frac{I}{R^2} + m_1 + m_2)} m_2 g$

Problema 8:



Del diagrama de cuerpo libre de la figura y de las ecuaciones de movimiento se tiene:

bloque: $mg-T = ma,$

cilindro: $N-Mg = 0$

$T-f = Ma_2$; traslación

$TR+fR = I\alpha$; rotación

Note que: (1) la tensión es la misma porque se desprecia el efecto de la polea; (2) las aceleraciones son diferentes porque se está desenrollando la cuerda en el cilindro; (3) la fuerza de fricción actúa en el sentido indicado en la figura, pues evita que los puntos del cilindro que entran en contacto con la superficie deslicen "hacia atrás", quedando en reposo instantáneo al tocarla, y provocando el rodamiento sin resbalar del cilindro.

Ecs. constitutivas: $a_2 = \alpha R$; rodamiento puro del cilindro.

$a_1 = a_2 + \alpha R$; por el desenrollamiento de la cuerda.

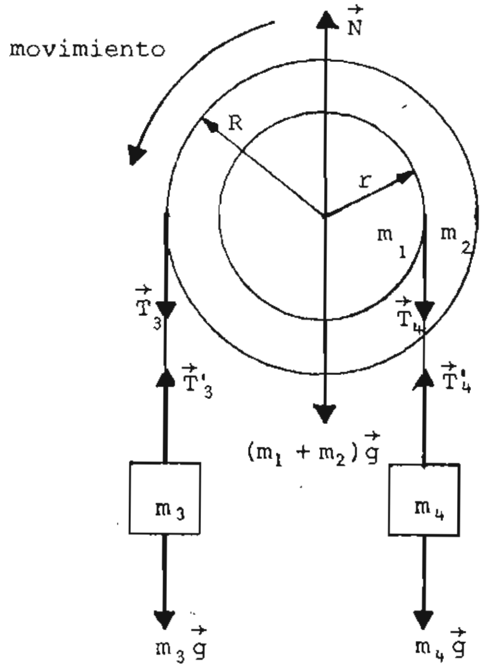
Las anteriores 6 ecuaciones contienen 6 incógnitas: T, a_1, N, f, a_2 y α y por lo tanto el sistema está completo y se obtiene:

a) $a_2 = \dfrac{2R^2 m}{I + MR^2 + 4mR^2}\, g \quad$ con $I = \frac{1}{2} MR^2$

b) $a_1 = \dfrac{4R^2 m}{I + MR^2 + 4mR^2}\, g$

c) $\alpha = \dfrac{2Rm}{I + MR^2 + 4mR^2}\, g$

<u>Problema 9</u>:



Del diagrama de cuerpo libre de la figura y de las ecuaciones de movimiento se tiene:

bloque m_3: $m_3g-T_3 = m_3a_3$

bloque m_4: $T_4-m_4g = m_4a_4$

Polea: $T_3R-T_4r = I\alpha$; rotación

$N-(m_1+m_2)g-T_3-T_4 = 0$; equilibrio traslacional.

Note que: (1) las tensiones son diferentes porque son diferentes cuerdas; (2) las aceleraciones son diferentes porque van a diferentes discos; (3) la aceleración angular es única para ambos discos porque están unidos; (4) $I = \frac{1}{2}m_2R^2+\frac{1}{2}m_1r^2$

ecuaciones constitutivas: $\alpha = a_4/r$

$\alpha = a_3/R$; las cuerdas no resbalan sobre los discos y son inextensibles.

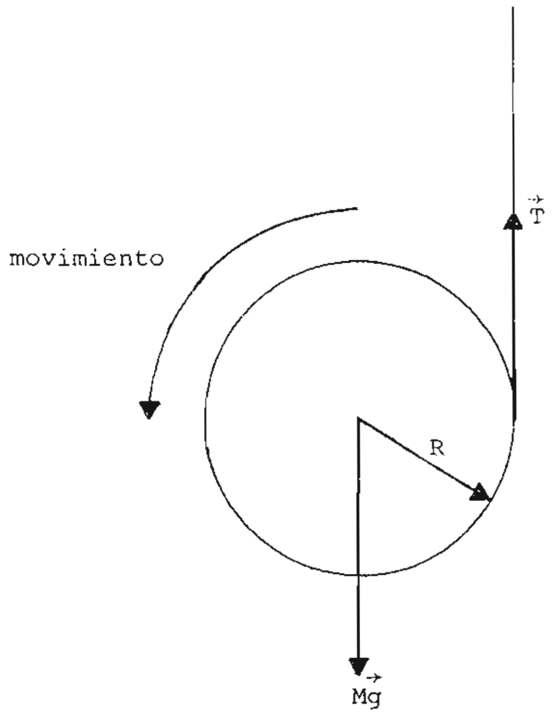
Las anteriores 6 ecuaciones tienen 6 incógnitas: T_3, a_3, T_4, a_4, α y N, por lo tanto el sistema es completo y se obtiene:

a) $\alpha = \dfrac{m_3R-m_4r}{I+m_3R^2+m_4r^2}g$

b) $a_3 = \dfrac{R(m_3R-m_4r)}{I+m_3R^2+m_4r^2}g$; $a_4 = \dfrac{r(m_3R-m_4r)}{I+m_3R^2+m_4r^2}g$

c) $T_3 = \dfrac{I+m_4(r^2+Rr)}{I+m_3R^2+m_4r^2}m_3g$; $T_4 = \dfrac{I+m_3(R^2+Rr)}{I+m_3R^2+m_4r^2}m_4g$

Problema 10:



a) Puesto que se jala la cuerda para que el cilindro no se traslade, se tiene de:

$$\vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm} = 0$$

que: $T - mg = 0 \Rightarrow \underline{T = mg}$

b) El trabajo hecho por T en llevar al cilindro de una $\omega_o = 0$ a una velocidad angular ω es igual al cambio de energía cinética de rotación del cilindro (la energía cinética de traslación es cero, puesto que el cilindro no se traslada) y por lo tanto, tenemos:

$$\frac{1}{2}I\omega^2 - 0 = W \quad \text{pero} \quad I = \frac{1}{2}MR^2$$

$$\therefore \; W = \frac{1}{4}MR^2\omega^2$$

c) La longitud de la cuerda desenrollada es: $\ell = R\theta$ donde θ es medido en radianes y nos indica las vueltas dadas por él. Ahora bien, como T es constante, el movimiento de rotación es uniformemente acelerado y entonces:

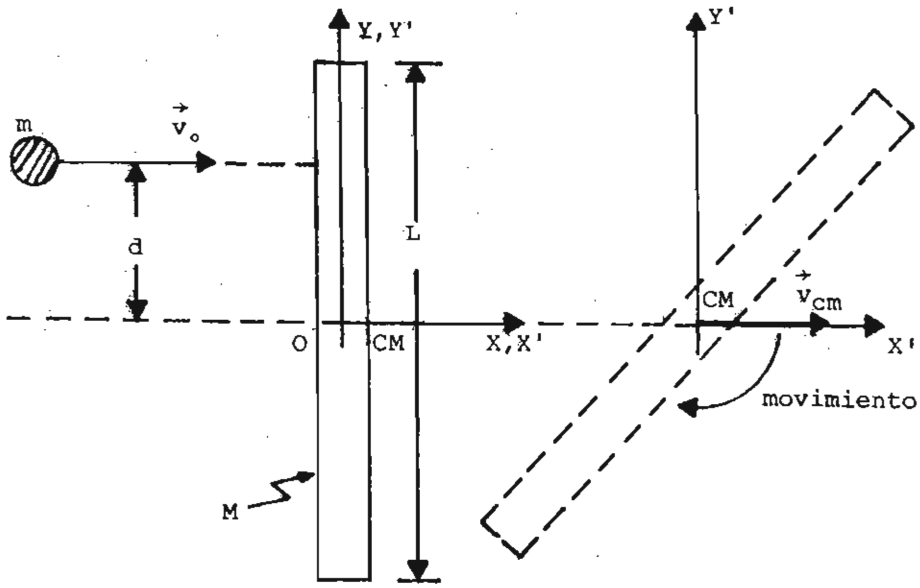
$$\omega^2 = \omega_o^2 + 2\alpha\theta$$

de donde, $\theta = \dfrac{\omega^2}{2\alpha}$ ya que $\omega_o = 0$

y: $$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{TR}{\frac{1}{2}MR^2} = \frac{MgR}{\frac{1}{2}MR^2} = \frac{2g}{R}$$

$$\therefore \; \theta = \frac{\omega^2 R}{4g}$$

Problema 11:



a) Como el movimiento se ejecuta en un plano horizontal sin fricción, entonces $\vec{P} \equiv CTE$ en ese plano.

El sistema de referencia de laboratorio (OXY) y el del C.M (CM.X'Y') los hacemos coincidir en el centro geométrico de la regla (posteriormente se verá la utilidad de dicha elección). La conservación del momento la expresamos como:

$\vec{P} = \vec{P}_P+\vec{P}_R$; donde $\vec{P}_P \equiv$ momento lineal de la partícula.

$\vec{P}_R \equiv$ momento lineal de la regla.

Los momento lineales antes y después de la colisión son:

$$\vec{P}_i = \vec{P}_{Pi}+\vec{P}_{Ri} = mv_\circ \hat{\imath}$$

$\vec{P}_f = \vec{P}_{Pf}+\vec{P}_{Rf} = M\vec{v}_{cmf}$; donde $\vec{v}_{cm}$ es la velocidad del C.M. de la regla.

Igualando los momentos, se obtiene:

$$\underline{\vec{v}_{cmf} = \frac{mv_\circ}{M}\hat{\imath}}$$ ¡¡El C.M. de la regla se mueve en línea recta (eje X)!!

b) Como no hay fuerzas externas sobre cada cuerpo del sistema, entonces no hay torcas sobre ellos y por lo tanto la torca total externa es cero y entonces $\vec{L} \equiv CTE$.

La conservación del momento angular la expresaremos como:

$\vec{L} = \vec{L}_P+\vec{L}_R$; donde $\vec{L}_P \equiv$ momento angular de la partícula.

$\vec{L}_R \equiv$ momento angular de la regla.

además: $\vec{L}_R = \vec{L}_R'+M\vec{r}_{cm}x\vec{v}_{cm} = I'\vec{\omega}+M\vec{r}_{cm}x\vec{v}_{cm}$

$$\therefore \quad \vec{L} = \vec{L}_P+I'\vec{\omega}+M\vec{r}_{cm}x\vec{v}_{cm}$$

Los momentos angulares antes y después del choque son:

$$\vec{L}_i = \vec{L}_{Pi}+I'\vec{\omega}_i+M\vec{r}_{cmi}\times\vec{v}_{cmi} = -mv_\circ d\hat{k}$$

y: $$\vec{L}_f = \vec{L}_{Pf}+I'\vec{\omega}_f+M\vec{r}_{cmf}\times\vec{v}_{cmf} = \frac{1}{12}ML^2\vec{\omega}_f; \text{ ya que } I' = \frac{1}{12}ML^2$$

Note que por la elección del sistema de referencia de laboratorio, se tiene que:

$$\vec{r}_{cmf} = \vec{r}_{cmi} = 0 \text{ y } \therefore\ M\vec{r}_{cmf}\times\vec{v}_{cmf} = 0$$

Igualando los momentos angulares y despejando $\vec{\omega}_f$ se encuentra que:

$$\vec{\omega}_f = -\frac{12mv_\circ d}{ML^2}\hat{k}$$

¡¡Rota la regla alrededor de su C.M. en el sentido de las manecillas del reloj!!

c) La energía cinética la expresaremos como:

$K = K_P+K_R$; donde $K_P \equiv$ energía cinética de la partícula

$K_R \equiv$ energía cinética de la regla.

además $$K_R = K_R'+\frac{1}{2}Mv_{cm}^2 = \frac{1}{2}I'\omega^2+\frac{1}{2}Mv_{cm}^2$$

$$\therefore\ K = K_P+\frac{1}{2}Mv_{cm}^2+\frac{1}{2}I'\omega^2$$

Las energías cinéticas antes y después de la colisión son:

$$K_i = K_{Pi}+\frac{1}{2}Mv_{cmi}^2+\frac{1}{2}I'\omega_i^2 = \frac{1}{2}mv_\circ^2$$

y: $$K_f = K_{Pf}+\frac{1}{2}mv_{cmf}^2+\frac{1}{2}I'\omega_f^2 = \frac{m^2v_\circ^2}{2M}+\frac{6m^2v_\circ^2d}{M^2L^2}$$

en donde se han puesto los valores encontrados para $\vec{v}_{cmf}$ y $\vec{\omega}$.

Finalmente, encontrando $\Delta K = K_f - K_i$ realizando algebra elemental, se obtiene:

$$\Delta K = \frac{[m^2(12d^2+L^2)-M^2L^2]}{2ML^2} v_o^2$$

Si con los datos numéricos $\Delta K = 0 \Rightarrow$ el choque es elástico y si $\Delta K \neq 0$, entonces el choque es inelástico.

Problema 12:

Este problema es semejante al anterior, sólo que el proyectil choca por debajo del C.M. en la figura 17 y rebota con cierta velocidad. Utilizando los sistemas de referencia del problema anterior, tenemos:

a) El momento lineal antes y después de la colisión es:

$$\vec{P}_i = mv_o\hat{\imath}$$

$$\vec{P}_f = -mv_f\hat{\imath}+M\vec{v}_{cmf}$$

Igualando los momentos se obtiene para $\vec{v}_{cmf}$

$$\vec{v}_{cmf} = \frac{m(v_o+v_f)}{M}\hat{\imath}$$

b) El momento angular antes y después de la colisión es:

$$\vec{L}_i = mv_o d\hat{k}$$

$$\vec{L}_f = \frac{1}{12}ML^2\vec{\omega}_f - mv_f d\hat{k}$$

Igualando los momentos angulares y despejando ω_f se tiene que:

$$\vec{\omega}_f = \frac{md(v_o+v_f)}{\frac{1}{12}ML^2}\hat{k}$$

$$\vec{\omega}_f = \frac{12md(v_\circ + v_f)}{ML^2}\hat{k}$$

c) Las energías cinéticas antes y después del choque son:

$$K_i = \frac{1}{2}mv_\circ^2$$

y: $$K_f = \frac{1}{2}mv_{cmf}^2 + \frac{1}{2}I'\omega_f^2 + \frac{1}{2}mv_f^2$$

y: $$\Delta K = K_f - K_i$$

Como en el anterior problema: $K = 0 \Rightarrow$ elástico, si $\Delta K \neq 0 \Longrightarrow$ inelástico.

Problema 13.

Este problema es semejante a los anteriores con la condición extra de que el choque es elástico y por lo cual $K \equiv CTE$.

a) Mediante la conservación del momento lineal intentaremos encontrar el valor de m.

Usando los mismos sistemas de referencia que en el problema 16 se tiene que el momento lineal antes y después de la colisión es:

$$\vec{P}_i = -mv_\circ\hat{\imath} \quad y \quad \vec{P}_f = M\vec{v}_{cmf}$$

Igualando se obtiene:

$$\vec{v}_{cmf} = -\frac{mv_\circ}{M}\hat{\imath} \qquad \text{— (1)}$$

esta ecuación contiene dos incógnitas m y $\vec{v}_{cmf}$, por lo que intentaremos con la conservación del momento angular resolver esto.

El momento angular antes y después de la colisión es:

$$\vec{L}_i = -mv_o d\hat{k}$$

y:
$$\vec{L}_f = I'\vec{\omega} = \frac{1}{12}ML^2\vec{\omega}$$

Igualando los momentos angulares se tiene:

$$\underline{\vec{\omega} = -\frac{12mv_o d}{ML^2}\hat{k}} \quad \text{—} \ (2)$$

nuevamente, esta ecuación contiene dos incógnitas $\vec{\omega}$ y m y en total, hasta el momento se tienen dos ecuaciones con tres incógnitas, pero falta utilizar la conservación de la energía cinética y lo más probable es que esto nos quite la dificultad.

La energía cinética antes y después de la colisión es:

$$K_i = \frac{1}{2}mv_o^2$$

$$\text{y: } K_f = \frac{1}{2}mv_{cmf}^2+\frac{1}{2}I'\omega_f^2 = \frac{1}{2}M\left(\frac{m^2v_o^2}{M^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ML^2\right)\left(\frac{(12)^2m^2v_o^2d^2}{M^2L^4}\right)$$

Igualando las energías se tiene que:

$$\frac{1}{2}mv_o^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2v_o^2}{M} + \frac{6m^2v_o^2d^2}{ML^2}$$

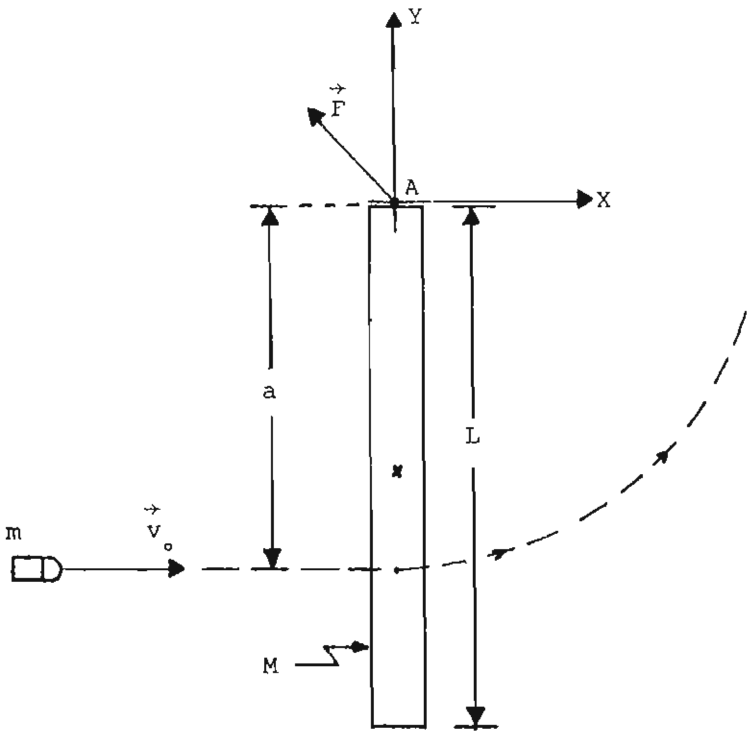
$$\Rightarrow \text{(a)} \quad m = \frac{M}{[1+12d^2/L^2]}$$

y de la ecuación (1): (b) $\vec{v}_{cmf} = -\dfrac{v_o}{[1+12d^2/L^2]}\hat{i}$

y de la ecuación (2): (c) $\vec{\omega}_f = \dfrac{-12v_o d}{L^2[1+12d^2/L^2]}\hat{k}$

$$\Rightarrow \quad \vec{\omega}_f = -\frac{v_o d}{[L^2+12d^2]}\hat{k}$$

Problema 14:



a) Puesto que la regla sólo tiene rotación y es alrededor del punto A, pondremos el sistema de referencia de laboratorio como se indica en la figura y las cantidades se medirán desde A.

El momento angular antes y después de la colisión es:

$$\vec{L}_i = mv_o a\vec{k}$$

y $L_{fA} = (ma^2+I_A)\vec{\omega}$; donde ma^2 es el momento de inercia de la bala, I_A es el momento de inercia de la regla con respecto al pivote (punto A) y $\vec{\omega}$ es la velocidad angular, la cual es común para el sistema (bala + regla).

como: $$I_A = \frac{1}{3}ML^2, \text{ entonces:}$$

$$\vec{L}_{FA} = (ma^2+\frac{1}{3}ML^2)\vec{\omega}$$

b) El momento lineal antes y después de la colisión es:

$$\vec{P}_i = mv_o\hat{\imath} \quad \text{y} \quad \vec{P}_f = (M+m)\vec{v}_{cm}$$

en donde $\vec{v}_{cm}$ es desconocida.

c) En este problema el momento lineal no se conserva puesto que en la colisión existe una fuerza externa que ejerce el pivote (que impide la traslación de la regla) sobre la regla. Para encontrar la distancia a supondremos que el tiempo que dura la colisión (intervalo que transcurre desde que la bala toca, se incrusta y se detiene dentro de la regla) es tan pequeño que el movimiento de la regla es imperceptible, por lo que durante la colisión se conserva el momento lineal ($\vec{F}_{ext} = 0$).

Igualando los momentos lineales, se tiene:

$$mv_o = (M+m)v_{cm} \qquad \text{— (1)}$$

la velocidad del C.M. se puede encontrar del inciso (a) ya que como $\vec{F}$ actúa en el pivote, no ejerce torca, es decir, $\vec{\tau}_A = 0$, y por lo tanto $\vec{L}_A$ = CTE.

Igualando los momentos angulares del inciso (a) y despejando ω, se tiene:

$$\omega = \frac{mv_{\circ}a}{(ma^2+\frac{1}{3}ML^2)} \qquad -(2)$$

pero $v_{cm} = \omega y_{cm}$, donde y_{cm} es la distancia desde A al C.M. del sistema (bala+regla) y está dado por:

$$y_{cm} = \frac{ma+M(\frac{L}{2})}{m+M} \qquad -(3)$$

de (2) y (3)

$$v_{cm} = \frac{mv_{\circ}a}{(ma^2+\frac{1}{3}ML^2)} \quad \frac{ma+M(\frac{L}{2})}{(m+M)}$$

y de la ec. (1)

$$mv_{\circ} = \frac{mv_{\circ}a}{(ma^2+\frac{1}{3}ML^2)} \quad [ma+M(\frac{L}{2})]$$

Despejando $\underline{a}$ tenemos:

$$a = \frac{2}{3}L$$

d) El cambio en la energía cinética es:

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}(ma^2+I_A)\omega^2 - \frac{1}{2}mv_{\circ}^2$$

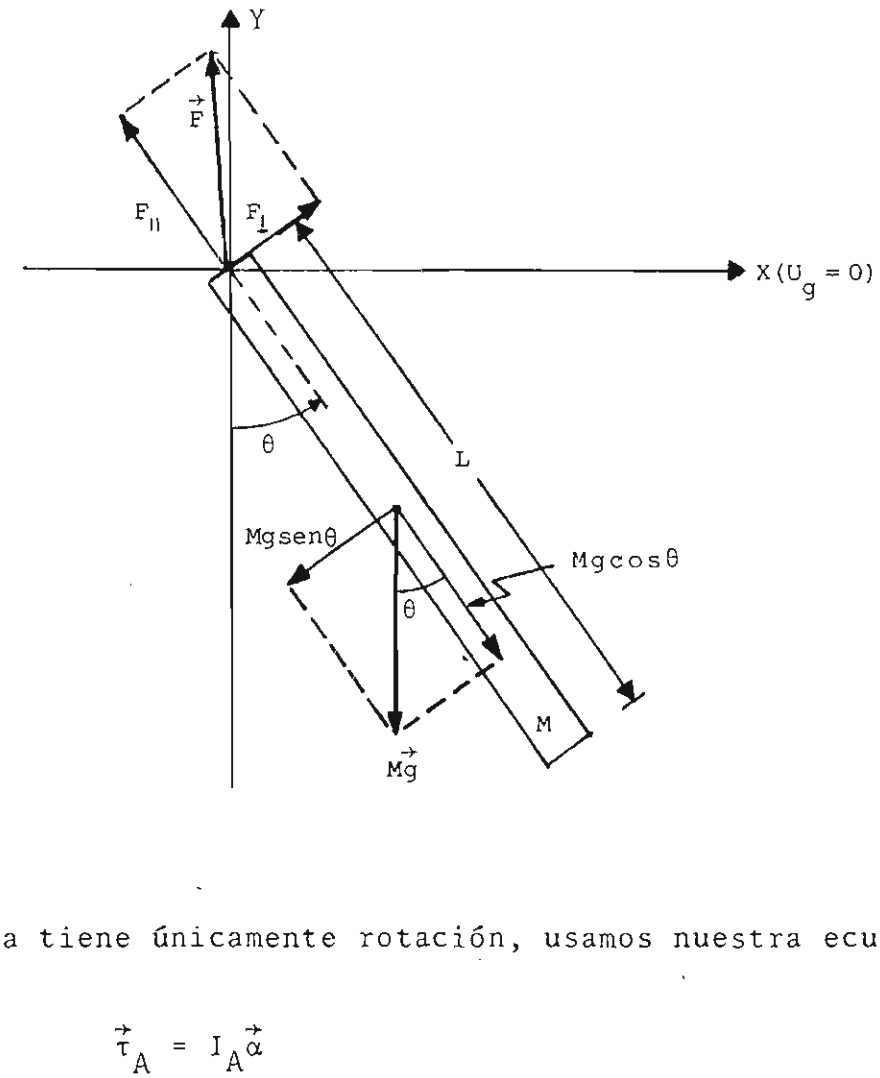
Sustituyendo $I_A = \frac{1}{3}ML^2$ y el valor de ω encontrado anteriormente se tiene:

$$\Delta K = -\frac{1}{2}mv_o^2\left[\frac{\frac{1}{3}ML^2}{\frac{1}{3}ML^2+ma^2}\right]$$

en el caso especial en el que se conserva el momento lineal $(a = \frac{2}{3}L)$ se tiene que:

$$\Delta K = -\frac{1}{2}mv_o^2\left[\frac{3M}{3M+4m}\right]$$

Problema 15:



a) Como la regla tiene únicamente rotación, usamos nuestra ecuación:

$$\vec{\tau}_A = I_A\vec{\alpha}$$

En el pivote existe una fuerza $\vec{F}$ que ejerce éste sobre la regla, pero no hace torca, por lo cual la única fuerza que produce torca es su peso (ó su componente perpendicular a la regla). Observe que en la vertical: $\vec{\tau} = 0$ (posición de equilibrio rotacional).

De la ecuación anterior, tenemos:

$$-Mg\operatorname{sen}\theta\left(\frac{L}{2}\right) = \left(\frac{1}{3}ML^2\right)\alpha$$

Despejando α, se tiene:

$$\underline{\alpha = -\frac{3}{2L}g\operatorname{sen}\theta}$$

el signo (-) se introduce porque la torca producida por el peso tiende a evitar que la regla se aleje de la vertical ($\vec{\tau}$ actúa en sentido opuesto al de $\vec{a}$).

b) Para encontrar la velocidad angular, podemos utilizar la conservación de la energía mecánica.

La energía mecánica inicial y final con el nivel de referencia para la energía potencial gravitacional indicado en la figura es:

$$E_i = 0$$

y:
$$E_F = \frac{1}{2}I_A\omega^2 - Mg\frac{L}{2}\cos\theta$$

Igualando las energías y despejando ω se tiene:

$$\omega = \sqrt{\frac{MgL}{I_A}\cos\theta} \;;\; \text{pero } I_A = \frac{1}{3}ML^2$$

$$\therefore \quad \underline{\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}\cos\theta}}$$

c) De la figura, la fuerza $\vec{F}$ la descomponemos en su parte radial y tangencial (perpendicular) y sabemos que:

$$\Sigma F_R = F_{\parallel} - Mg\cos\theta = M\omega^2 R$$

y:
$$F_T = F_{\perp} - Mg\,\text{sen}\,\theta = MR\alpha$$

donde:
$$R = \frac{L}{2}$$

Substituyendo los valores de ω, α y R en las anteriores ecuaciones se obtiene:

$$F_{\parallel} = \frac{5}{2}Mg\cos\theta$$

y:
$$F_{\perp} = \frac{1}{4}Mg\,\text{sen}\,\theta$$

3. RESUMEN DE LA UNIDAD III. OSCILACIONES MECÁNICAS

Definición: Un movimiento periódico es cualquier movimiento que se repite en el tiempo, es decir, el estado de movimiento de un cuerpo evoluciona periódicamente en el tiempo.

Observación: La descripción matemática de un movimiento periódico se hace usualmente en términos de expresiones que contienen funciones senos y cosenos, a las que se denominan funciones armónicas. Por esta razón, a un movimiento periódico también se le conoce como movimiento armónico.

Definición: Un movimiento oscilatorio es un movimiento periódico en el que el cuerpo regresa a su estado inicial recorriendo la misma trayectoria pero en sentido inverso; es decir, el cuerpo se mueve de ida y vuelta siempre sobre el mismo camino.

Ejemplos:

1) El movimiento de un cuerpo sujeto a la fuerza de un resorte (sistema resorte-masa).
2) El movimiento de un péndulo simple.
3) El movimiento de un balín sobre un rizo en forma de U.

Observación: En general, un cuerpo describe un movimiento oscilatorio alrededor de una posición de equilibrio, denominada punto de equilibrio estable, debido a que sobre él actúa una fuerza restauradora o restitutiva, que tiende a obligarlo a regresar a dicha posición, cuando el cuerpo ha sido desplazado fuera de ella. Cuando los límites del movimiento en ambos sentidos respecto de la posición de equilibrio son equidistantes, se dice que el movimiento es armónico simple. Adoptaremos el sistema resorte-masa como nuestro sistema de estudio para hacer la descripción dinámica del movimiento armónico de un cuerpo.

3.1 OSCILADOR ARMÓNICO SIMPLE

Definición: Un oscilador armónico simple (en adelante O.A.S.) en una dimensión es una partícula m que se mueve en línea recta (eje x), sometida a la acción de una fuerza dada por:

$$F = -kx, \qquad k = CTE$$

Donde x es la coordenada de posición de m.

Ecuación de movimiento:

De la segunda Ley de Newton, la ecuación de movimiento de un O.A.S. es:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad ó \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad ó \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Donde $\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$ es la frecuencia angular del O.A.S.

Solución de la ecuación de movimiento:

La solución de la ecuación de movimiento del O.A.S. es:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$$

Donde A y δ son constantes de integración cuyos valores se determinan a partir de las condiciones iniciales de movimiento, de la siguiente forma.

$$A = \sqrt{x_o^2 + \frac{v_o^2}{\omega^2}} \qquad \text{amplitud del movimiento}$$

$$\delta = \arctan\left[-\frac{v_o}{x_o\omega}\right] \qquad \text{constante de fase}$$

Se observa que el movimiento de m es acotado:

$$-A \leq x \leq A$$

y periódico, de período T dado por:

$$T = \frac{2\Pi}{\omega} = 2\Pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

La frecuencia f del O.A.S., se define como:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\Pi} = \frac{1}{2\Pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

También se observa que:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega sen(\omega t + \delta) \Rightarrow A\omega \geq v \geq -A\omega$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t + \delta) \Rightarrow A\omega^2 \geq a \geq -A\omega^2$$

Consideraciones de energía en un O.A.S.:

Dado que la fuerza F = -kx es conservativa, entonces el movimiento de un O.A.S. debe ser conservativo, es decir:

$$E = CTE$$

Para un O.A.S. se tiene:

Energía potencial:

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \delta) \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 \geq U \geq 0$$

Energía cinética:

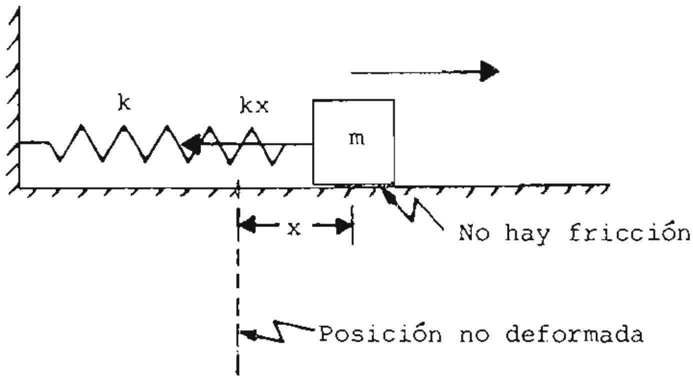
$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k\left[A^2 - x^2\right] = \frac{1}{2}kA^2 sen^2(\omega t + \delta) \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 \geq K \geq 0$$

Energía mecánica:

$$E = CTE = K + U = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = U_{max} = K_{max}$$

Ejemplos de O.A.S.:

i) Movimiento horizontal de una partícula unida a un resorte horizontal fijo.



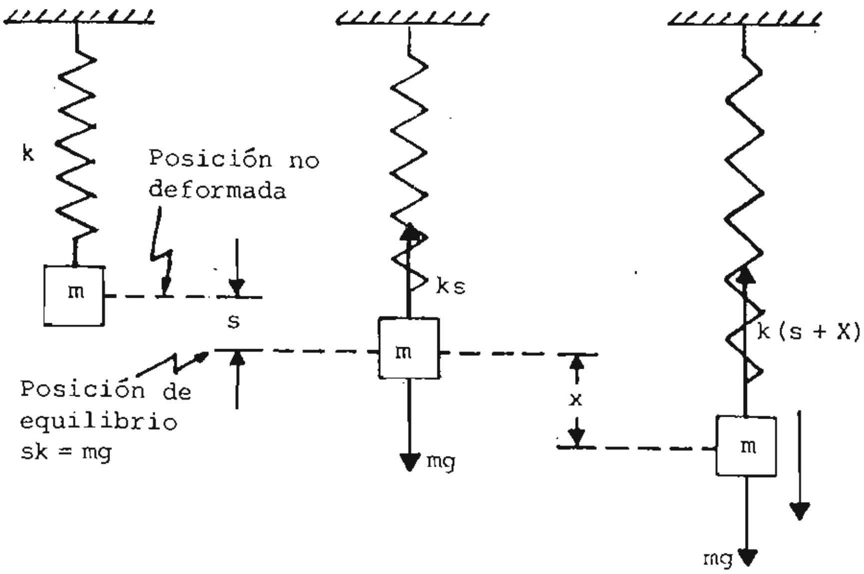
en este caso:

$$m\frac{d^2x}{dt} = -kx \Rightarrow x = A\cos(\omega t + \delta)$$

con $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

k es la constante del resorte, x es la posición de m con respecto de la posición no deformada del resorte.

ii) Movimiento vertical de una partícula unida a un resorte vertical fijo.

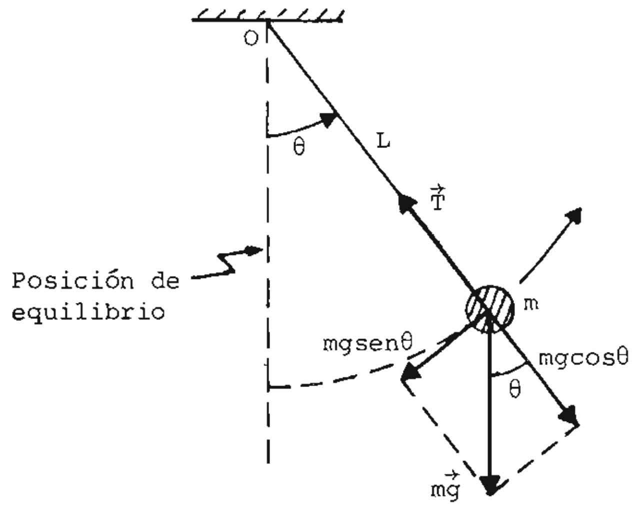


En este caso:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x+s) + mg \Longrightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \Longrightarrow x = A\cos(\omega t+\delta),\ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

k es la constante del resorte, x es la posición de m respecto de la posición de equilibrio del sistema.

iii) Péndulo simple.



En variables angulares:

$$mL^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\ mgL\operatorname{sen}\theta$$

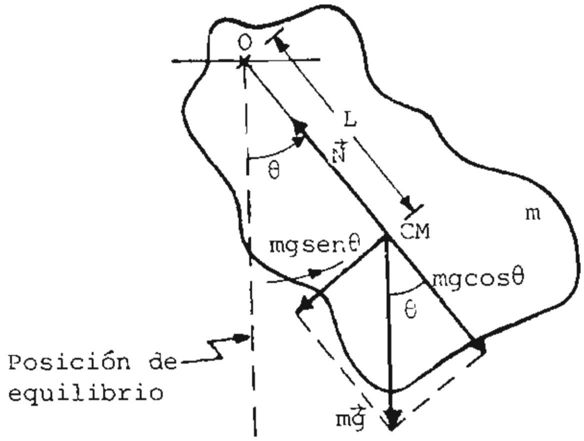
Para pequeñas amplitudes
$\theta << 1$ tal que $\operatorname{sen}\theta \simeq \theta$ entonces:

$$L\frac{d^2}{dt} = -g\theta \Longrightarrow \theta = \theta_m\cos(\omega t + \delta)$$

donde: $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$, $\theta_m = \sqrt{\theta_o^2 + \frac{W_o^2}{\omega^2}}$, $\delta = \arctan\left[-\frac{W_o}{\theta_o\omega}\right]$

θ_o y W_o son la posición y la velocidad angular de m en $t = 0$, L es la longitud del péndulo.

iv) Péndulo físico:



en variables angulares:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgL\,\text{sen}\,\theta$$

Para pequeñas amplitudes:

$\theta \ll 1$ tal que $\text{sen}\,\theta \simeq \theta$, entonces:

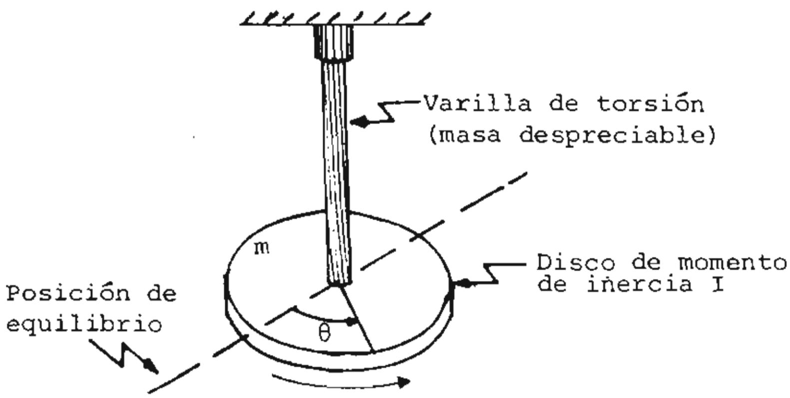
$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgL\theta \Rightarrow \theta = \theta_m \cos(\omega t + \delta),$$

Donde: $\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}}$, $\theta_m = \sqrt{\theta_o^2 + \frac{W_o^2}{\omega^2}}$, $\delta = \arctan\left[-\frac{W_o}{\theta_o \omega}\right]$

θ_o y W_o son la posición y velocidad angular de m en t=0

I es el momento de inercia del péndulo, respecto del eje de rotación que pasa por el punto de rotación O.

v) Péndulo de torsión:



para pequeñas torsiones θ, la varilla ejerce una torca sobre el disco dada por:

$$\tau = -K\theta$$

donde K es la constante de torsión de la varilla.

Entonces para el movimiento del disco tenemos:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -K\theta \Rightarrow \theta = \theta_m \cos(\omega t + \delta), \text{ con } \omega = \sqrt{\frac{K}{I}}$$

$$\text{y: } \theta_m = \sqrt{\theta_o^2 + \frac{W_o^2}{\omega^2}} \quad , \quad \delta = \arctan\left[-\frac{W_o}{\theta_o \omega}\right]$$

θ_o y W_o son la posición y velocidad angular del disco en $t=0$.

I es el momento de inercia del disco.

3.2 OSCILADOR ARMÓNICO AMORTIGUADO

Ecuación de movimiento:

Considerando que en un O.A.S. actúa una fuerza amortiguadora dada por:

$$F = -bv = -b\frac{dx}{dt} \text{ , con } b = CTE$$

La ecuación de movimiento es:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - bv = -kx - b\frac{dx}{dt}$$

$$\text{ó } m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

Solución de la ecuación:

Para la solución de la ecuación se tienen tres casos:

i) Caso subamortiguado:

Es el caso en el que: $\omega_o > \gamma$, donde $\omega_o^2 = \frac{k}{m}$, $\gamma = \frac{b}{2m}$

y la solución es:

$$x(t) = A_o e^{-\gamma t}\cos(\omega t + \delta)$$

donde $\omega^2 = \omega_o^2 - \gamma^2$, A_o y δ son constantes que dependen de las condiciones iniciales de movimiento.

En este caso el movimiento de m es oscilatorio, de período T dado por:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2}}$$

La amplitud del movimiento decae exponencialmente de la forma:

$$A = A_o e^{-\gamma t}$$

ii) Amortiguamiento crítico:

Es el caso en que $\omega_o = \gamma$ y la solución es:

$$x(t) = e^{-\gamma t}(C_1 + C_2 t)$$

Donde C_1 y C_2 son constantes que dependen de las condiciones iniciales de movimiento.

En el caso en que las condiciones iniciales son:

$x(t=0) = A_o$: Posición inicial

$v(t=0) = o$: Velocidad inicial

se tiene que:

$$C_1 = A_o \quad y \quad C_2 = \gamma A_o$$

por lo que la solución para este caso se expresa finalmente como:

$$x(t) = A_o\ (1+\gamma t)\ e^{-\gamma t}$$

En este caso el movimiento de m <u>no</u> es oscilatorio; simplemente se va acercando a la posición de equilibrio.

iii) Caso sobreamortiguado.

Es el caso en que $\omega_o < \gamma$ y la solución es:

$$x(t) = e^{-\gamma t}[C_1 \exp(-\sqrt{\gamma^2-\omega_o^2}\,t) + C_2 \exp(\sqrt{\gamma^2-\omega_o^2}\,t)]$$

Donde C_1 y C_2 son constantes que dependen de las condiciones iniciales de movimiento.

En el caso en que las condiciones iniciales son:

$x(t=0) = A_o$: posición inicial

$v(t=0) = 0$: velocidad inicial

se tiene que :

$$C_1 = \frac{A_o}{2}(1-\sqrt{1-Q^2})$$

$$C_2 = \frac{A_o}{2}(1+\sqrt{1+Q^2})$$

Donde: $Q = \frac{\omega_o}{\gamma}$ es el factor de calidad del oscilador.

Por lo tanto, la solución para este caso puede expresarse como:

$$x(t) = \frac{A_o}{2}e^{-\gamma t}\{(1+\sqrt{1-Q^2})\exp(\omega_o\sqrt{\frac{1}{Q^2}-1}\,t) +$$

$$+(1-\sqrt{1-Q^2})\exp(-\omega_o\sqrt{\frac{1}{Q^2}-1}\,t)\}$$

En este caso el movimiento de m <u>tampoco</u> es oscilatorio; se va acercando a la posición de equilibrio más lentamente que en el caso de amortiguamiento crítico.

3.3 OSCILADOR ARMÓNICO AMORTIGUADO Y FORZADO

Si sobre un oscilador armónico amortiguado actúa una fuerza periódica del tipo:

$$F = F_o \cos\omega_f T$$

con F_o = CTE, ω_f = CTE entonces la ecuación de movimiento es:

$$m\frac{d^2x}{dt} = -kx - b\frac{dx}{dt} + F_o \cos\omega_f t \quad ó \quad m\frac{d^2x}{dt} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_o \cos\omega t$$

cuya solución general es:

$$x(t) = x_h(t) + A\cos(\omega_f t + \delta)$$

donde $x_h(t)$ es la solución general de la ecuación homogénea que decae exponencialmente. A x_h se le llama el término transitorio; para t suficientemente grande, tal que:

$$x_h << A\cos(\omega_f t + \delta)$$

se tiene que:

$$x(t) = A\cos(\omega_f t + \delta)$$

Que es la solución permanente y representa un movimiento armónico simple de frecuencia angular ω_f y donde la amplitud A y δ son constantes cuyos valores son:

$$A = \frac{F_o/m}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_o^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}}$$

$$\delta = \arctan\frac{2\gamma\omega_f}{\omega_o^2 - \omega_f^2}$$

Es decir, A depende de ω_f; el valor máximo de A se obtiene para el valor de ω_f dado por:

$$\omega_f = \sqrt{\omega_o^2 - 2\gamma^2} = \omega_R$$

y es:

$$A_{max} = \frac{F_\circ/m}{2\delta\sqrt{\omega_\delta^2-\gamma^2}} = \frac{F_\circ/m}{2\gamma\omega}$$

con: $\omega = \sqrt{\omega_\circ^2-\gamma^2}$

A este valor de $\omega_f = \omega_R$ se le llama la frecuencia angular de resonancia.

Si no hay amortiguamiento, $\gamma = 0$ y entonces: $\omega_R = \omega_\circ$.

y se observa que: Si $\omega_f \rightarrow \omega_\circ \Rightarrow A \rightarrow \infty$.

PROBLEMAS DE LA UNIDAD III DE DINÁMICA

1. Un oscilador armónico simple de masa $m = 2$ kg es descrito por la ecuación $X(t) = 4 \cos(0.1t + 0.5)$m. Encontrar: (a) la amplitud, el período, la frecuencia, la frecuencia angular y la constante de fase, (b) la velocidad y la aceleración al tiempo $t = 5\pi$s, (c) las condiciones iniciales ($t = 0$s), (d) la energía cinética y la energía potencial al tiempo $t = 10\pi$s (e) la energía mecánica del oscilador.

2. Una partícula cuya masa es de 0.5 kg se mueve con movimiento armónico simple. Su período es de 0.15s y la amplitud de su movimiento es de 0.1m. Calcular: (a) la aceleración y la fuerza cuando la partícula se encuentra a 0.05m a la izquierda de la posición de equilibrio, (b) la energía potencial, cinética y mecánica cuando la partícula se encuentra a 0.05m a la derecha de la posición de equilibrio.

3. Una partícula de masa $m = 0.5$ kg ejecuta un movimiento armónico simple alrededor de la posición de equilibrio, para $t = 0$s la velocidad es $V_0 = -10$ m/s y la elongación es cero. Si el período del movimiento es de 3s, determinar: (a) la frecuencia angular, la frecuencia, la amplitud y la constante de fase, (b) la elongación, velocidad y aceleración para el tiempo $t = 3/4$s, (c) la energía cinética, potencial y mecánica en la posición de equilibrio y en la elongación máxima.

4. La energía mecánica del oscilador armónico simple de la figura 1 es de $E = 10$J. La posición y la velocidad iniciales son,

respectivamente $X_o = +2m$ y $V_o = +5$ m/s. Calcular: (a) la amplitud de las oscilaciones, (b) la frecuencia angular, (c) la masa del bloque y (d) la constante de fase.

5. Un cuerpo de masa M se encuentra unido a un resorte sin deformar de constante k como se muestra en la figura 2. Una bala de masa m incide con velocidad V_1 y se incrusta en el bloque. Calcular: (a) la amplitud, la constante de fase y la frecuencia angular del movimiento del nuevo cuerpo (M + m), (b) la posición, velocidad y aceleración del cuerpo al tiempo t = 1.5s.

6. Un hombre con una masa M = 75 kg permanece de pié en una plataforma como se muestra en la figura 3. La plataforma asciende y desciende con un movimiento armónico simple de amplitud $A_o = 0.5$ m. Determine el valor más pequeño del período de movimiento, para que el hombre no se despegue de la plataforma.

7. Un oscilador armónico simple está constituído por un bloque de masa M = 1.5 kg, unido a un resorte como se ilustra en la figura 4. Se observa que al tiempo t = 0.5s el bloque se encuentra en la posición $X_o = 0.15$ m y su velocidad es V_o=3 m/s. Si su período de oscilación es $T_o = 2s$, encontrar: (a) la amplitud, la constante de fase, la frecuencia angular y la constante del resorte; (b) la posición, velocidad y aceleración del bloque al tiempo t = 1s; (c) la energía cinética y potencial del sistema cuando el bloque se encuentra en X=0.10m.

8. El péndulo de un reloj tiene un período $T_o = 4s$ en un lugar de la tierra donde g = 9.8 m/s^2. Si el péndulo se lleva a un lu-

gar en el cual $g = 9.75\ m/s^2$, ¿cuánto se habrá atrasado el reloj en 5 días?

9. La figura 5 muestra un péndulo físico fijo en el punto 0. Éste se compone de una varilla de masa $M = 1$ kg y longitud $L = 1.5$ m y de una esfera unida a el de radio $R = 0.30$ m y masa $m = 4$ kg. (a) Establecer: la ecuación de movimiento de su C.M.; (b) en $t = 0s$, $\theta = 15°$ y parte del reposo, calcular la velocidad del C.M. en la posición de equilibrio; (c) calcular la longitud del péndulo simple equivalente.

10. Una esfera de radio R (péndulo físico) se suspende de un cable (masa despreciable) fijo a un punto O de tal manera que la distancia del centro de la esfera al punto O es ℓ, como se muestra en la figura 6. (a) Dar la expresión del período del sistema; (b) determinar la longitud L del péndulo simple equivalente, (c) supóngase que este último es el péndulo de un reloj cuyo período $T_0 = 2s$ en un lugar de la tierra donde $g = 9.8\ m/s^2$. ¿cuánto se ha atrasado (¿o adelantado?) el reloj en 24 horas si L disminuye en 2 cm?; (d) ¿cuánto se atrasará (¿o adelantará?) en 24 horas si se lleva a un lugar donde $g = 9.9\ m/s^2$ y mantenemos su longitud original L?

11. Una esfera de masa $M = 35$ kg rueda sin resbalar sobre una superficie horizontal y va unida a un resorte sin masa como se muestra en la figura 7. El sistema se suelta del reposo en una posición en la cual el resorte está estirado $X_0 = 0.5$ m. Calcular: (a) la ecuación de movimiento del sistema; (b) la constante k del resorte si el período de oscilación es $T_0 = 7s$; (c) la velocidad máxima del C.M. de la esfera.

12. Un péndulo simple tiene un período de 2s y una amplitud de 2°. Después de 10 Oscilaciones completas su amplitud ha sido reducida a 1.5°. Encontrar: (a) la constante de amortiguamiento (γ), (b) la frecuencia angular.

13. Cuatro personas cuya masa total es 300 kg comprimen las muelles de un automóvil 10 cm cuando suben a éste. El automóvil cargado (masa total 900 kg) pasa un bache y se pone a oscilar, calcular: (a) el período de oscilación; (b) si se adaptan amortiguadores de tal manera que la amplitud de las oscilaciones se reduce a la décima parte de la inicial después de 5 oscilaciones. Calcular la constante de la fuerza de amortiguamiento.

14. En un oscilador amortiguado la cantidad $\tau = 1/2\gamma$ se le llama el tiempo de relajación. (a) verificar que tiene unidades de tiempo; (b) ¿en cuánto ha variado la amplitud del oscilador después de un tiempo τ?; (c) expresar, como función de τ, el tiempo necesario para que la amplitud se reduzca a la mitad de su valor inicial; (d) si $\gamma \ll \omega_o$ demostrar que la energía del oscilador puede escribirse como: $E = 1/2\ m\ \omega_o^2\ A_o^2\ e^{-2\gamma t}$; (e) la potencia promedio disipada se define por $P = \frac{dE}{dt}$ demostrar que $P = 2\gamma E = \frac{E}{\tau}$.

15. Un oscilador cuya masa es 50 kg se ve amortiguado por efectos externos cuya constante de amortiguamiento es $\gamma = 0.8\ s^{-1}$. Para evitarlo se le aplica una fuerza periódica con frecuencia $W_f = 1$ rad/s y amplitud $F_o = 25$ N. Se considera el oscilador como un resorte horizontal; (a) ¿qué constante debe tener para que la amplitud de oscilación sea máxima? (Sugerencia: ¿ Cómo se define la frecuencia de resonancia?); (b) calcule la amplitud en este caso.

16. El período de un oscilador amortiguado es de 2s. Después de 10 oscilaciones su amplitud decae a 1/2 del valor inicial. (a) encontrar la constante de amortiguamiento γ, (b) calcular la frecuencia del oscilador no amortiguado W_o, (c) si E_i es la energía inicial y E_f la energía después de 10 oscilaciones, calcule E_f/E_i, (d) para evitar el amortiguamiento se le aplica una fuerza del tipo $F = (0.1N)\cos W_f t$. Calcule el valor de W_f tal que la amplitud del movimiento sea máxima. Si la masa del oscilador es m = 1 kg. ¿Cuál es el valor de esta amplitud?

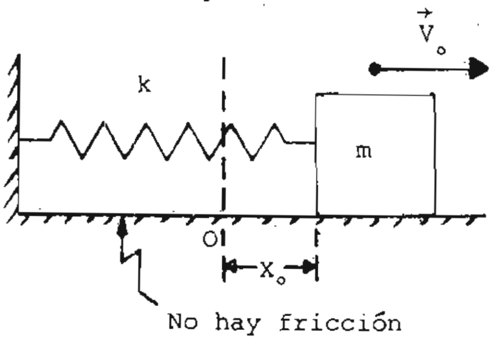
17. Un bloque de masa m está unido a un resorte k y un amortiguador de constante de fuerza b, como se muestra en la figura 8. Inicialmente se estira el resorte haciendo colgar un cuerpo de masa m' como se ilustra en la figura. Estando el sistema en equilibrio, se corta la cuerda y se inicia el movimiento: (a) considere b = 0 (no hay amortiguamiento) y encuentre la amplitud, la constante de fase, la frecuencia angular y el período del movimiento del bloque; (b) en este caso b = 2.1 kg/s, calcule la frecuencia angular y el período del bloque; (c) para el caso (b) calcule el valor de la amplitud después de haber efectuado tres oscilaciones.

18. Un oscilador armónico simple tiene un resorte de constante k = 1000 N/m y un período T_o = 0.8s. Se coloca después en un medio disipativo de tal forma que su amplitud inicial decae a una octava parte de su valor en un tiempo t = 18s. (a) calcular la constante de amortiguamiento γ y la constante b de la fuerza amortiguadora. Para evitar el amortiguamiento se aplica una fuerza períodica de amplitud F_o = 21 N y de período T_f = 1.25s

(b) calcular la frecuencia angular de la fuerza períodica y la amplitud de las oscilaciones, (c) si se quieren oscilaciones de máxima amplitud, calcular la frecuencia que debe tener la fuerza periódica y encuentre la amplitud del movimiento correspondiente a dicha frecuencia.

19. Se tiene un sistema masa-resorte con un bloque de masa $M = 50$ kg y la constante del resorte $k = 250$ N/m. Si al pasar el bloque por la posición de equilibrio tiene una velocidad de $V_o = 5$ m/s. (a) calcular la frecuencia angular y el período del movimiento, (b) si este sistema se introduce en un medio viscoso, se observa que la amplitud del movimiento decae a la cuarta parte de su valor inicial en 5 oscilaciones, ¿cuál es la constante de la fuerza amortiguadora, b, del medio?, (c) ¿cuánta energía perdió el sistema en las oscilaciones?, (d) para evitar que siga disminuyendo la amplitud se le aplica una fuerza periódica $F = 150 \cos W_f t$ N. Para que el sistema entre en resonancia, ¿cuál debe ser la frecuencia de la fuerza periódica aplicada y cuál la máxima amplitud que se logra establecer para el movimiento?

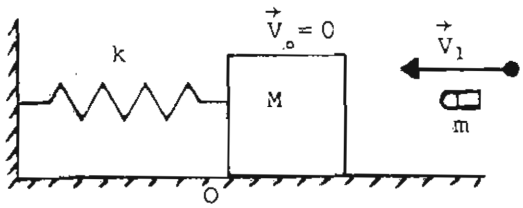
Figura 1



$k = 0.4$ N/m; $X_o = +2$m

$V_o = +5$ m/s; $E = 10$ J

Figura 2



$M = 5.03$ kg; $m = 0.01$ kg

$V = 378$ m/s; $k = 47$ N/m

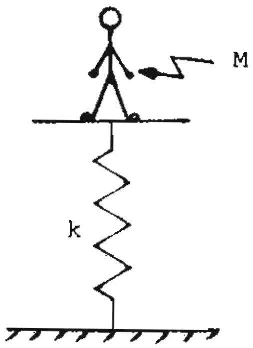


Figura 3

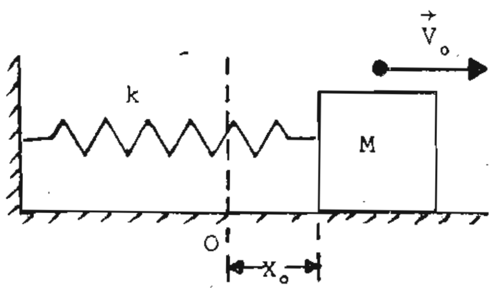


Figura 4

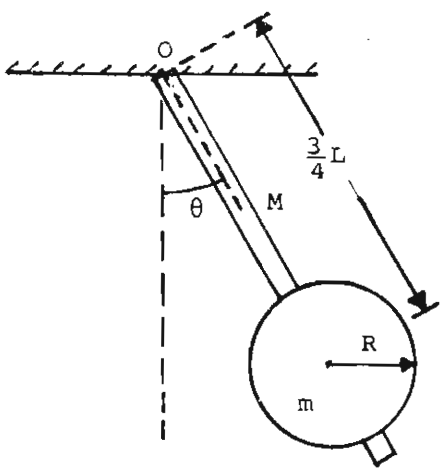


Figura 5

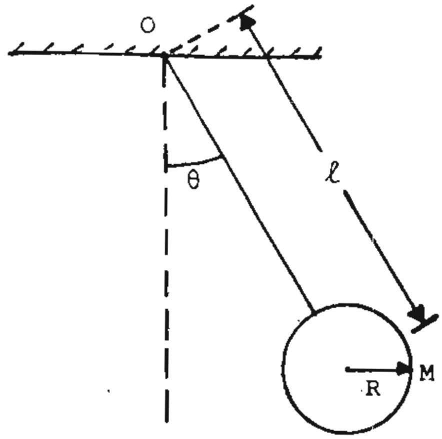


Figura 6

$M = 1$ kg; $\ell = 1$ m; $R = 0.3$ m.

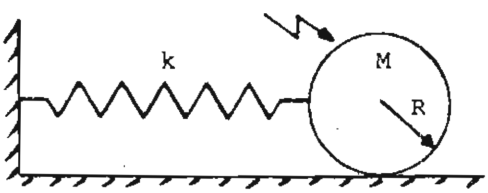


Figura 7

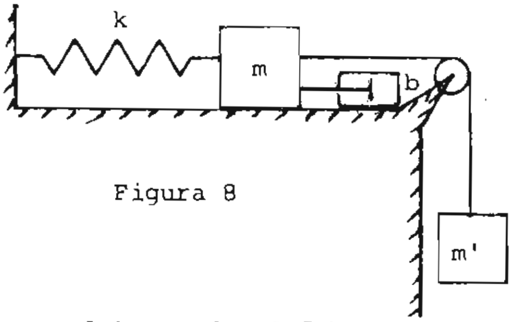


Figura 8

m = 1 kg; m' = 0.5 kg
k = 10 N/m

SOLUCIÓN A LOS PROBLEMAS DE LA UNIDAD III DE DINÁMICA

Problema 1:

$$m = 2kg$$

$$x(t) = 4 \cos(0.1t+0.5) \text{metros}$$

a) La amplitud es: $A_o = 4$ metros.

Frecuencia angular: $\omega_o = 0.1$ rad/s

Frecuencia: $\nu_o = \frac{\omega_o}{2\pi} = \frac{1}{20\pi}$ Hertz

Constante de fase: $\delta = 0.5$ rad

Período: $T_o = 1/\nu_o = 20\pi$ seg.

b) La velocidad y la aceleración a cualquier tiempo son:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -0.4 \operatorname{sen}(0.1t+0.5)$$

y: $$a(t) = \frac{dv}{dt} = -0.04 \cos(0.1t+0.5)$$

en el tiempo $t = 5\pi$ seg., se tiene.

$$v(t=5\pi) = -0.4 \operatorname{sen}(0.5\pi+0.5) = -0.35 m/s$$

y: $$a(t=5\pi) = -0.04 \cos(0.5\pi+0.5) = +0.019 m/s^2$$

c) Las condiciones iniciales son:

$$A_o = \sqrt{x_o^2+\frac{v_o^2}{\omega_o^2}} =$$

$$x(0) = 4 \cos(0.5) = 3.51m$$

y: $$v(0) = 0.4 \operatorname{sen}(0.5) = 0.19 m/s$$

d) $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(2)[0.4sen(\pi+0.5)]^2 = 0.037J$

$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2 = \frac{1}{2}(2)(0.1)^2[4cos(\pi+0.5)]^2 = 0.123J$

e) $E = \frac{1}{2}KA_0^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2A_0^2 = \frac{1}{2}(2)(0.1)^2(4)^2 = 0.16J$

Problema 2:

$m = 0.5kg; \quad T_o = 0.15s; \quad A_o = 0.1m$

a) $a = -\omega_0^2x = -(\frac{2\pi}{T_o})^2x = -(\frac{2\pi}{0.15})^2(-0.05) = +87.73m/s^2$

$F = ma = (0.5)(87.73) = 43.86N$

b) $U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2 = \frac{1}{2}m(\frac{2\pi}{T_o})^2x^2 = \frac{1}{2}(0.5)(\frac{2\pi}{0.15})^2(+0.05)^2 = 1.096J$

$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m[\omega_0^2(A_0^2-x^2)] = \frac{1}{2}m(\frac{2\pi}{T_o})^2(A_0^2-x^2) =$

$= \frac{1}{2}(0.5)(\frac{2\pi}{0.15})^2(0.1-0.05) = 3.29J$

$E = \frac{1}{2}kA_0^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2A_0^2 = \frac{1}{2}(0.5)(\frac{2\pi}{0.15})^2(0.1) = 4.386J$

Problema 3:

$m = 0.5kg; \quad$ en $t = 0: \quad V_o = -10m/s$ y $X_o = 0; \; T_o = 3s$

a) $\omega_o = \frac{2\pi}{T_o} = \frac{2\pi}{3} \; ; \; f = \frac{\omega_o}{2\pi} = \frac{1}{T_o} = \frac{1}{3}Hz$

$A_o = \sqrt{x_0^2+\frac{V_0^2}{\omega_0^2}} = \frac{V_o}{\omega_o} = \frac{-10(3)}{2\pi} = -\frac{15}{\pi}m$

$$\delta = \tan^{-1} - \frac{V_o}{\omega_o x_o} = \tan^{-1} - \frac{(-10)(3)}{2\pi(0)} = \tan^{-1} + \infty = \frac{\pi}{2}$$

b) $x = -\frac{15}{\pi}\cos\left[\frac{2\pi}{3}t + \frac{\pi}{2}\right]$

$$x(\tfrac{3}{4}) = -\frac{15}{\pi}\cos\left[\frac{2\pi}{3}(\tfrac{3}{4}) + \frac{\pi}{2}\right] = -\frac{15}{\pi}\cos\pi = \frac{15}{\pi}\,m$$

$$v = \frac{15}{\pi}(\tfrac{2\pi}{3})\,\text{sen}\left[\frac{2\pi}{3}t + \frac{\pi}{2}\right] = 10\pi\,\text{sen}\left\{\frac{2\pi}{3}t + \frac{\pi}{2}\right]$$

$$v(\tfrac{3}{4}) = 10\ \text{sen}\pi = 0\ m/s$$

$$a(\tfrac{3}{4}) = -\omega_o^2 x(\tfrac{3}{4}) = -(\tfrac{2\pi}{3})^2(\tfrac{15}{\pi}) = -\frac{4\pi^2}{9}\,\frac{15}{\pi} = -\frac{20\pi}{3}\ m/s^2$$

c) En la posición de equilibrio:

$$U = 0 \ \ y \ \ K_{max} = E = \tfrac{1}{2}kA_o^2 = \tfrac{1}{2}m\omega_o^2A_o^2 = \tfrac{1}{2}(0.5)(\tfrac{2\pi}{3})^2(\tfrac{15}{\pi})^2$$

$$\Rightarrow \quad K_{max} = \frac{1}{2}(0.5)(\tfrac{4}{9})(15)^2 = 25J$$

d) En la elongación máxima:

$$K = 0 \ \ y \ \ U_{max} = E = \tfrac{1}{2}kA_o^2 = 25J$$

Problema 4:

$$E = 10J;\ x_o = 2m \ \ y \ \ V_o = 5m/s$$

a) $E = \frac{1}{2}kA_o^2 \Rightarrow A_o = \sqrt{\frac{2E}{k}} = \sqrt{\frac{20}{0.4}} = 7.07$ m

b) $A_o^2 = X_o^2 + \frac{V_o^2}{\omega_o^2} \Rightarrow \omega_o = \sqrt{\frac{1}{A_o^2 - X_o^2}}\ V_o = \sqrt{\frac{1}{50 - 4}}\ (5) = 0.74$ rad/s

c) $k = m\omega_o^2 \Rightarrow m = \frac{k}{\omega_o^2} = \frac{0.4}{(0.74)^2} = 0.736$kg

d) $\delta = \tan^{-1} - \frac{V_o}{X_o\omega_o} = \tan^{-1} - \frac{5}{(2)(0.74)} = -1.28$ rad

PROBLEMA 5:

$M = 5.03$ kg; $m = 0.01$ kg; $V = 378$ m/s; $k = 47$ N/m

a) Como la bala choca y se incrusta en el bloque, tenemos un choque totalmente inelástico, y la velocidad del nuevo cuerpo $m + M = 5.04$ kg es:

$$V_o = \frac{mV}{m + M} = \frac{(0.01)(378)}{(5.03)} = 0.75 \text{ m/s}$$

y es la velocidad inicial del movimiento oscilatorio que se va a efectuar. La posición inicial es cero ($X_o = 0$). De lo anterior, la amplitud es:

$$A_o = \sqrt{X_o^2 + \frac{V_o^2}{\omega_o^2}} = \frac{V_o}{\omega_o^2} = \frac{V_o}{\sqrt{\frac{k}{(m + M)}}}\ V_o \sqrt{\frac{(m + M)}{k}} = (0.75) \sqrt{\frac{5.03}{47}} = 0.245\text{m.}$$

La constante de fase:

$$\delta_o = \tan^{-1} - \frac{V_o}{X_o\omega_o} = \tan^{-1} - \frac{V_o}{X_o\sqrt{\frac{k}{m+M}}}$$

$$= \tan^{-1} -\frac{V_o}{X_o}\sqrt{\frac{m+M}{k}} = \tan^{-1} -\frac{(0.75)}{(0)}\sqrt{\frac{5.03}{47}}$$

$$= \tan^{-1}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

la frecuencia angular:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m+M}} = \sqrt{\frac{47}{5.03}} = 3.06\text{rad/s}$$

b) $X(t) = 0.245\cos(3.06t-\frac{\pi}{2})$

$V(t) \equiv (0.245)(3.06)\text{sen}(3.06t-\frac{\pi}{2}) = -0.75\text{sen}(3.06t-\frac{\pi}{2})$

$a = -\omega_o^2 x$

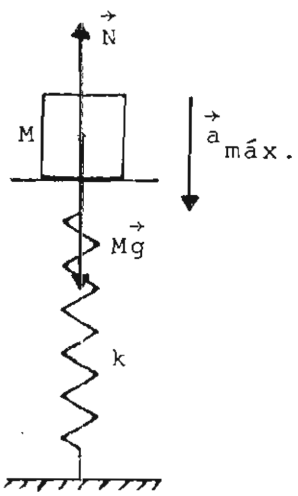
en $t = 1.5s$:

$X(1.5) = 0.245\cos((3.06)(1.5)-\frac{\pi}{2}) = -0.24m.$

$V(1.5) = -0.75\text{sen}((3.06)(1.5)-\frac{\pi}{2}) = -0.091m/s$

$a(1.5) = -\omega_o^2 X(1.5) = -(3.06)^2(-0.24) = +2.25m/s^2$

Problema 6:



En el punto de máxima elongación del resorte, las fuerzas que actúan sobre el hombre son la normal y su peso(ver la figura).

La aceleración sobre el cuerpo es:

$$a = \frac{Mg - N}{M},$$

pero si el hombre no alcanza a despegarse de la plataforma, tenemos que $\vec{N} = 0$, ya que en este caso la aceleración que le produce el peso al hombre es igual a la aceleración máxima que le produce el resorte; es decir:

$$g = A_o \omega_o^2 = A_o \left(\frac{2\pi}{T_{min}}\right)^2 \Rightarrow T_{min} = 2\pi\sqrt{\frac{A_o}{g}} \cong 4.4s$$

Problema 7:

$M = 1.5$ kg; en $t = 0.5s$: $y_o = +0.15m$ y $V_o = +3m/s.$, $T_o = 2s$

a) De las condiciones iniciales del problema.

$$A_o = \sqrt{X_o^2 + \frac{V_o^2}{\omega_o^2}} = \sqrt{(0.15)^2 + \frac{(3)^2}{\left(\frac{2\pi}{T_o}\right)}} = \sqrt{(0.15)^2 + \frac{(3)^2(4)}{4\pi^2}} = 0.97 \text{ m}$$

$$y: \quad = \tan^{-1} - \frac{V_o}{X_o\omega_o} = \tan^{-1} - \frac{(3.0)}{(0.15)\left(\frac{2\pi}{T_o}\right)^2} = \tan^{-1} - \frac{(3)(4)}{(0.15)4\pi^2} = -1.11 \text{ rad.}$$

$$\omega_o = \frac{2\pi}{T_o} = \frac{2\pi}{2} = \pi = 3.14 \text{ rad/s}$$

$$k = M\omega_o^2 = (1.5)(3.14)^2 = 14.97 \text{ N/m}$$

b) La posición, velocidad y aceleración son:

$$x(t) = 0.97\cos(3.14t - 1.11)$$

$$v(t) = -(0.97)(3.14)\text{sen}(3.14t - 1.11) = -3.04\text{sen}(3.14t - 1.11)$$

$$a = -\omega_o^2 x = -(3.14)^2 x$$

y en $t = 1s$, se tiene:

$x(1) = 0.97\cos(3.14-1.11) = -0.43\text{m}$

$v(1) = -3.04\,\text{sen}(3.14-1.11) = -2.73\text{m/s}$

$a(1) = -(3.14)^2 x(1) = -(3.14)^2(-0.43) = +4.24\text{m/s}^2$

c) La energía potencial en x = 0.10m es:

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(14.79)(0.1)^2 = 0.074\text{J}$$

La energía mecánica:

$$E = \frac{1}{2}kA_o^2 = \frac{1}{2}(14.79)(0.97)^2 = 6.96\text{J}$$

y la energía cinética es:

$$K = E-U = 6.96-0.074 = 6.88\text{J}$$

Problema 8:

$$T_o = 4\text{s cuando } g_o = 9.8\text{m/s}^2$$

Primero, tenemos que encontrar el período cuando g = 9.75m/s^2, esto es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\text{, pero } T_o = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g_o}} \Rightarrow \ell = \frac{T_o^2}{4\pi^2}g_o$$

$$T^2 = 4\pi^2\frac{\ell}{g} = \frac{4\pi^2}{g}\frac{T_o^2}{4\pi^2}g_o = \frac{g_o}{g}T_o^2$$

$$\Rightarrow T = \sqrt{\frac{g_o}{g}}T_o = \sqrt{\frac{9.8}{9.75}}(4) = 4.01\text{s}$$

Para encontrar el atraso, necesitamos multiplicar la diferencia de oscilaciones que existen por el período del reloj correcto.

$$\text{No. osc.(Reloj correcto)} = \frac{5\text{ días}}{T_o} = \frac{432000\text{s}}{4\text{s}} = 108000\text{ osc.}$$

$$\text{No. osc.(Reloj que se atrasa)} = \frac{5\ \text{días}}{T} = \frac{432000}{4.01} = 107730.67\ \text{osc.}$$

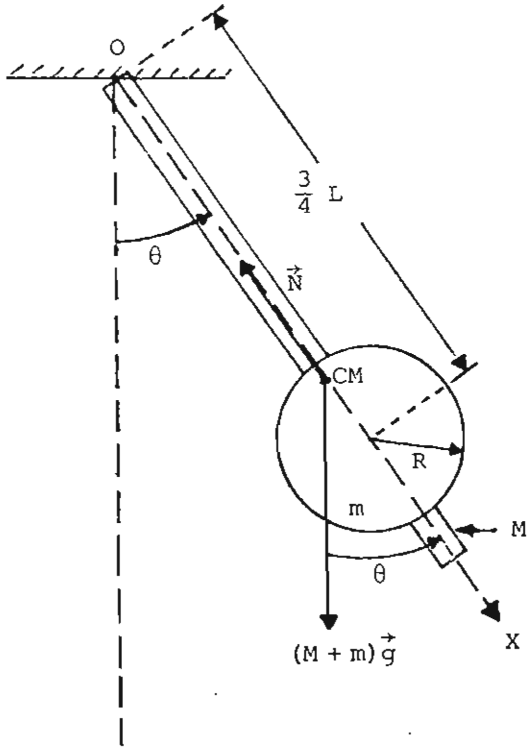
$$\Delta\ \text{oscilaciones} = 108000 - 107730.67 = 269.33\ \text{oscilaciones}$$

El tiempo de atraso es entonces:

$$(269.33)(4s) = 1077.3s$$

Problema 9:

$M = 1$ kg., $L = 1.5$m., $R = 0.30$m., $m = 4$ kg.



a) Para la resolución de este problema, consideremos que la varilla tiene una longitud total L y que el pedazo que le faltaría a la esfera es de masa despreciable, para considerarla sólida.

El C.M. de la varilla con respecto al punto 0 y sobre el eje x de la figura, es:

$$X_{CMV} = \frac{L}{2}$$

y el de la esfera:

$$X_{CME} = \frac{3}{4}L$$

el centro de masa del conjunto es:

$$X_{CM} = \frac{M(\frac{L}{2}) + m(\frac{3}{4}L)}{M+m}$$

$$\Rightarrow X_{CM} = \frac{(1)(\frac{1.5}{2}) + 4\left[\frac{3}{4}(1.5)\right]}{5} = \frac{0.75+4.5}{5} \simeq 1.05\text{m}$$

El momento de inercia del conjunto con respecto al punto 0 es:

$$I_o = I_{oV} + I_{oE} = \frac{1}{3}ML^2 + \left[\frac{2}{5}mR^2 + m(\frac{3}{4}L)^2\right]$$

$$= \frac{1}{3}ML^2 + m(\frac{2}{5}R^2 + \frac{9}{4}L^2)$$

$$I_o = \frac{1}{3}(1)(1.5)^2 + 4\left[\frac{2}{5}(0.3)^2 + \frac{9}{4}(1.5)^2\right]$$

$$= 0.75 + 20.384 = 21.134\text{kg-m}^2$$

La ecuación de movimiento es:

$$I\alpha = \tau$$

donde $\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ y $\tau = -(M+m)g\operatorname{sen}\theta$

$$= -(5)(9.8)\operatorname{sen}\theta = -49\operatorname{sen}\theta$$

para oscilaciones pequeñas, $\operatorname{sen}\theta \simeq \theta$ y entonces:

$$(21.134)\frac{d^2\theta}{dt^2} = -49\theta$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{49}{21.134}\,\theta = 0$$

$$\therefore \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2.32\theta = 0 \quad \text{Ec. de movimiento.}$$

b) De la ec. de movimiento, la posición y la velocidad angular del péndulo en función del tiempo son:

$$\theta(t) = \theta_\circ \cos(\omega_\circ t + \delta_\circ)$$

$$W(t) = \theta_\circ \omega_\circ \operatorname{sen}(\omega_\circ t + \delta_\circ)$$

Como $\theta(t = 0s) = 15°$ y $W(t = 0s) = 0$, entonces:

$$\theta_\circ = 15° \quad y \ \delta_\circ = 0$$

En la posición de equilibrio el péndulo alcanza su máxima velocidad angular, la cual está dada por:

$$|W_{máx}| = \theta_\circ \omega_\circ$$

Por lo que, la velocidad del C.M. en la posición de equilibrio es:

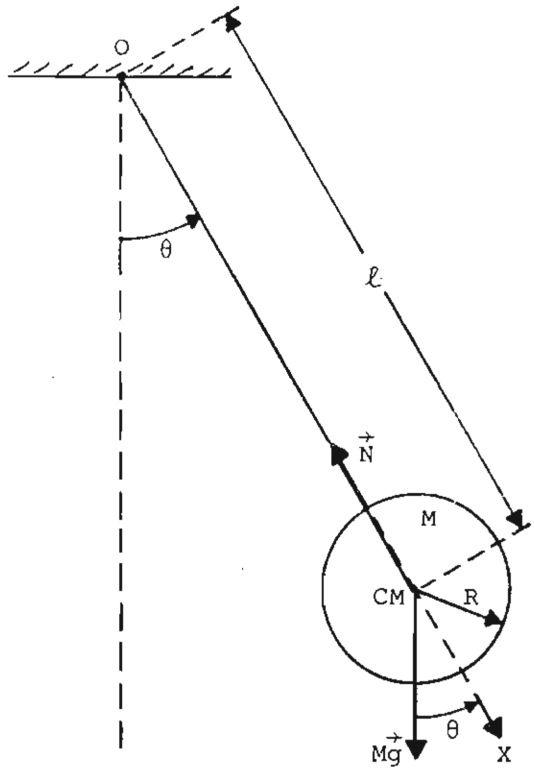
$$V_{cm}(eq.) = W_{máx} X_{cm} = \theta_\circ \omega_\circ X_{cm} = 0.419 \text{ m/s}$$

ya que el C.M. describe un arco de circunferencia de radio X_{cm} con centro en el punto 0.

c) La longitud del péndulo simple equivalente es:

$$L = \frac{I_o}{(M+m)X_{cm}} = \frac{21.134}{(5)(1.05)} = \frac{21.134}{5.25} = 4.03\text{m}$$

Problema 10:



El conjunto así formado en la figura es un péndulo compuesto y,

$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{I_o}{MgX_{cm}}} \qquad \text{— (1)}$$

Necesitamos calcular el momento de inercia de la esfera respecto de 0 y el C.M. de la esfera con respecto del mismo punto 0. El momento de inercia es:

$$I_o = \frac{2}{5}MR^2 + M\ell^2 = M\left[\frac{2}{5}R^2 + \ell^2\right] = (1)\left[\frac{2}{5}(0.3)^2 + 1^2\right]$$

$$\Rightarrow I_o = 1.036 kg\text{-}m^2$$

El centro de masa es: $X_{cm} = 1m$

$$\Rightarrow \text{De}(1): \qquad T_o = 2\pi\sqrt{\frac{1.036}{(1)(9.8)(1)}} = 2.043s$$

b) La longitud del péndulo simple equivalente es:

$$L = \frac{I_o}{MX_{cm}} = \frac{1.036}{(1)(1)} = 1.036m$$

c) Para el péndulo original,

$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{L_o}{g}} \Rightarrow g = \frac{L_o 4\pi^2}{T_o^2}$$

donde L_o es la longitud del péndulo (1.036m).

Cuando se acorta el péndulo, se tiene:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{L_o - 0.02}{L_o 4\pi^2/T_o^2}} = \frac{2\pi}{2\pi}\sqrt{\frac{L_o - 0.02}{L_o}}\ T_o$$

$$\Rightarrow T = \sqrt{\frac{L_o - 0.02}{L_o}}\ T_o = \sqrt{\frac{1.016}{1.036}}\ (2.043) = 2.023s$$

Ahora, procedemos como en el problema 8.

$$N° \text{ osc. (Reloj original)} = \frac{24HRS}{T_o} = \frac{86400}{2.043} = 42290.749$$

N° osc. (Reloj acortado) $= \dfrac{24 \text{ hrs}}{T_0} = \dfrac{86400}{2.023} = 42708.848$

Δ osc. = 418.099

Tiempo de adelanto:

$$(418.099)(2.043) = 854.17 s.$$

d) Para el péndulo original con $g_0 = 9.8 m/s^2$ se tiene:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L_0}{g_0}} \Rightarrow L_0 = \frac{T_0^2}{4\pi^2} g_0$$

y cuando $g = 9.9 m/s^2$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L_0}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{T_0^2}{4\pi^2}\frac{g_0}{g}} = T_0\sqrt{\frac{g_0}{g}}$$

entonces: $T = (2.043)\sqrt{\dfrac{9.8}{9.9}} = 2.033 s.$

N° osc. $(g=9.8 m/s^2) = \dfrac{24 \text{ hrs}}{T_0} = \dfrac{86,400 s}{2.043 s} = 42,290.749$

N° osc. $(g=9.9 m/s^2) = \dfrac{24 \text{ hrs}}{T} = \dfrac{86,400 s}{2.033 s} = 42,498.79$

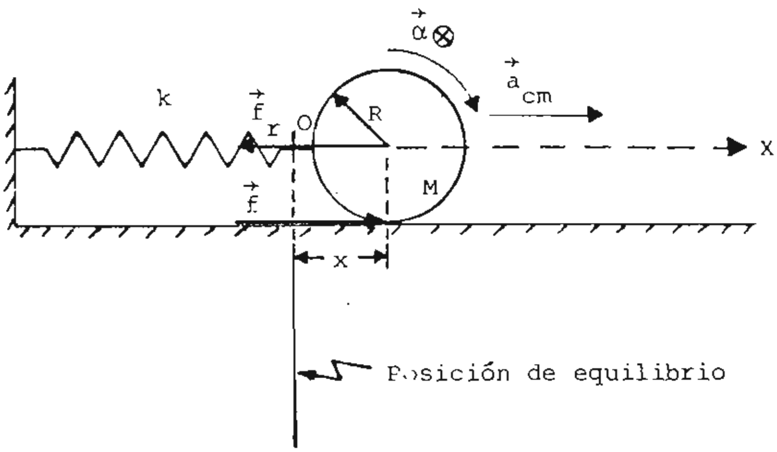
El tiempo de adelanto es:

$(\Delta N^\circ osc.)\ T_0 = |(42,290.749)-42,498.79)|(2.043 s)$

$$= 424.9 s$$

Problema 11:

a) Para que la esfera ruede sin resbalar, debe actuar una fuerza de fricción dinámica como se muestra:



Por lo que $\vec{f}$ y $\vec{a}_{cm}$ tienen la misma dirección y sentido.

Por 2a. Ley de Newton tenemos entonces:

$$\vec{f}r + \vec{f} = m\vec{a}_{cm}$$

pero: $fr = -kx \implies -kx + f = ma_{cm}$

Por el análogo rotacional de la 2a. Ley:

$$-fR = I\alpha$$

ya que la fuerza del resorte no ejerce ninguna torca.

Como la esfera rueda sin resbalar: $a_{cm} = \alpha R$

además: $I = \frac{2}{5}MR^2$

$$\implies fR = -(\tfrac{2}{5}MR^2)(\tfrac{a_{cm}}{R}) \qquad \therefore \quad f = -\tfrac{2}{5}Ma_{cm}$$

Por lo anterior : $-kx-\frac{2}{5}Ma_{cm} = Ma_{cm}$

La ec. de movimiento es: $\frac{7}{5}Ma_{cm}+kx = 0$

o también: $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{5k}{7M}x = 0$

b) La frecuencia angular es: $\omega_0 = \sqrt{\frac{5k}{7M}} = \frac{2\pi}{T_0}$

$\Longrightarrow k = 4\pi^2 \frac{7M}{5T_0^2} = \frac{28\pi^2 M}{5T_0^2} = 39.48 N/m$

c) La energía mecánica del oscilador en la posición de equilibrio es:

$$E = \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}MV^2_{cmeq} + \frac{1}{2}I\omega^2_{eq}$$

$$= \frac{1}{2}MV^2_{cmeq} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}MR^2\right)\frac{V^2_{cmeq}}{R^2}$$

$$= \frac{7}{10}MV^2_{cmeq}$$

Por lo que la velocidad máxima del C.M. de la esfera es:

$$V_{cmeq} = \sqrt{\frac{5}{7}\frac{R}{M}}\ X_0 = 0.45 m/s$$

Problema 12:

a) La amplitud decae con el tiempo: $A(t) = A_0 e^{-\gamma t}$. Después dc 10 oscilaciones $t = 10T$, donde T es el período del oscilador amortiguado; entonces:

$$A_f = A_i e^{-10\gamma t};\; A_f = 1.5°;\; A_i = 2°$$

$$\frac{A_f}{A_i} = e^{-10\gamma T} \Rightarrow 10\gamma T = \ell n \frac{A_i}{A_f}$$

$$10\gamma \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2}} = \ell n \frac{A_i}{A_f} \Rightarrow 400\pi^2\gamma^2 = (\omega_o^2-\gamma^2)(\ell n \frac{A_i}{A_f})^2$$

Despejando γ tenemos: $\gamma = \dfrac{\omega_o^2}{\sqrt{400\pi^2+(\ell n\, A_i/A_f)^2}}\, \ell n \dfrac{A_i}{A_f} = 0.0144 s^{-1}$

b) $\omega = \sqrt{\omega_o^2-\gamma^2} = \sqrt{\pi^2-(0.0144)^2} = 3.1415 rad/s$

Problema 13:

a) Puesto que el sistema hombres + automóvil está en equilibrio,

$$M_H g - kx = 0$$

$$\Rightarrow k = \frac{M_H g}{x} = \frac{(300)(9.8)}{0.1} = 29400 N/m$$

y el período de oscilación es:

$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{M_T}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{(900)}{(29400)}} = 1.1s$$

b) $A_f = \frac{1}{10} A_i$. Al igual que en el problema anterior, el tiempo que transcurre en ese decaimiento es:

$$t = 5T$$

donde T es el período calculado en (a), entonces:

$$A_f = A_i e^{-5\gamma T} \Rightarrow 10 = e^{5(1.1)\gamma}$$

$\Rightarrow \quad 10 = e^{5.5\gamma}$, despejando γ, se tiene:

$$\gamma = \frac{\ln 10}{5.5} = 0.42 \mathrm{rad/s}$$

Problema 14:

a) $\tau = 1/2\gamma$, γ tiene unidades inversas de segundo (ver problema 13) y τ tiene las unidades de segundo.

b) La amplitud decrece en el tiempo como:

$A(t) = A_o e^{-\gamma t}$, pero $t = \tau = \frac{1}{2\gamma}$

$\Rightarrow A(\tau) = A_o e^{-\frac{1}{2}} = A_o e^{-0.5} = 0.61 A_o$

c) $A_f = \frac{1}{2}A_o \Rightarrow \frac{1}{2}A_o = A_o e^{-\gamma t_f} \Rightarrow t_f = \frac{1}{\gamma} \ln 2$

$\Rightarrow t_f = \tau(2\ln 2) = 1.39\tau$

d) $\gamma \ll \omega_o$. La posición y la velocidad del oscilador armónico amortiguado son:

$$x(t) = A_o e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \alpha)$$

y: $V(t) = -A_o e^{-\gamma t}[\gamma \cos(\omega t + \alpha) + \omega \mathrm{sen}(\omega t + \alpha)]$

si $\gamma \ll \omega_o$: $A \to A_o$

$$\gamma \cos(\omega t + \alpha) \ll 1$$

$$\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2} \rightarrow \omega_o$$

$$\alpha \rightarrow \delta$$

$$\therefore \quad X(t) \cong A_o e^{-\gamma t}\cos(\omega_o t+\delta)$$

$$V(t) = -A_o e^{-\gamma t}\omega_o \mathrm{sen}(\omega_o t+\delta)$$

Las energías potencial y cinética son:

$$U = \frac{1}{2}kX^2 = \frac{1}{2}m\omega_o^2 X^2 = \frac{1}{2}m\omega_o^2\ A_o^2 e^{-2\gamma t}\cos^2(\omega_o t+\delta)$$

$$K = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}mA_o^2\omega_o^2 e^{-2\gamma t}\mathrm{sen}^2(\omega_o t+\delta)$$

y la energía mecánica es entonces;

$$E = K+U = \frac{1}{2}mA_o^2\omega_o^2 e^{-2\gamma t}$$

e) $P = -\dfrac{dE}{dt} = -(-2\gamma)\ \dfrac{1}{2}mA_o^2\omega_o^2 e^{-2\gamma t} = 2\gamma E$

pero $\tau = \dfrac{1}{2\gamma}$, entonces también $P = E/\tau$

Problema 15:

a) Para que las oscilaciones sean con amplitud máxima, la frecuencia debe ser la de resonancia:

$$\omega_R = \sqrt{\omega_o^2 - 2\gamma^2} = \sqrt{(\omega_o^2-\gamma^2)-\gamma^2} = \sqrt{\omega^2-\gamma^2}$$

pero $\omega = \dfrac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega_R = \sqrt{\dfrac{4\pi^2}{T^2}-\gamma^2} = \sqrt{\pi^2-(0.8)^2} = 3.04\,\mathrm{rad/s}$

b) La amplitud es:

$$B_{max} = \frac{F_o/m}{\sqrt{(\omega_o^2-\omega_f^2)^2+4\gamma^2\omega_f^2}} = \frac{\frac{25}{50}}{\sqrt{[(3.24)^2-(3.04)^2]^2+4(0.8)^2(3.04)^2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1.58 + 23.66}} = 0.0996\ m$$

donde: $\omega_f = \omega_R$

Problema 16:

$$T = 2s$$

a) La amplitud decae en el tiempo como:

$$A(t) = A_i e^{-\gamma t}$$

Si la amplitud decae 1/2 de su velocidad inicial ($A_f = A_i/2$), entonces el tiempo que transcurre es: $t_f = 10T$, donde T es el período del oscilador amortiguado, entonces:

$$A_f = A_i e^{-10\gamma T} \Rightarrow \frac{1}{2}A_i = A_i e^{-10\gamma T}$$

Despejando γ, se tiene:

$$\gamma = \frac{1}{10T}\ln 2 = \frac{1}{10(2)}\ln 2 = \frac{1}{20}\ln 2 = 0.0347 \text{rad/s}$$

b) $\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2} \Rightarrow \omega_o^2 = \omega^2 + \gamma^2 = (\frac{2\pi}{T})^2 + \gamma^2$

$$\omega_o^2 = \pi^2 + (0.0347)^2 = 9.8708$$

$\therefore\ \omega_o = 3.1418 \text{rad/s}$

c) Del problema 14 se tiene:

$$E_i = \frac{1}{2}m\omega_o^2(A_o e^{-\gamma t_i})^2$$

$$E_f = \frac{1}{2}m\omega_o^2(A_o e^{-\gamma t_f})^2$$

pero $t_f = t_i + 10T$, entonces:

$$E_f = E_i e^{-10\gamma t}$$

$$\therefore \quad \frac{E_f}{E_i} = e^{-10\gamma t} = e^{-10(0.0347)(2)} = 0.4996$$

d) La frecuencia para que la amplitud sea máxima, es la de resonancia:

$$\omega_R = \sqrt{\omega_o^2 - 2\gamma^2} = \sqrt{(3.1418)^2 - 2(0.0347)^2} = 3.1414 \text{rad/s}$$

e) La amplitud es:

$$B_{max} = \frac{F_o/m}{\sqrt{(\omega_o^2-\omega_f^2)^2+4\gamma^2\omega_f^2}} = \frac{0.1/1}{\sqrt{[(3.1418)^2-(3.1414)^2]^2+4(0.0347)^2(3.1414)^2}}$$

$$\therefore \quad B_{max} = 0.4587 \text{m.}; \text{ con } \omega_f = \omega_R$$

Problema 17:

a) $b = 0$; como el sistema está en equilibrio, la tensión en la cuerda es igual al peso del bloque m':

$$T = m'g$$

además, la suma de fuerzas sobre el bloque m es tal que:

$$T - kx_o = 0$$

donde x_o es la elongación inicial del resorte. De lo anterior, se tiene:

$$m'g = +kx_o$$

$$\Rightarrow x_\circ = \frac{m'g}{k} = \frac{(0.5)(9.8)}{10} = 0.49m.$$

y además la velocidad del bloque m es inicialmente cero:

$$v_\circ = 0$$

Como tenemos las condiciones iniciales del problema, podemos calcular la amnlitud y la constante de fase:

$$A_\circ = \sqrt{x_\circ^2+\frac{v_\circ^2}{\omega_\circ^2}} = \sqrt{x_\circ^2+\frac{v_\circ^2}{k/m}} = \sqrt{x_\circ^2+\frac{mv_\circ^2}{k}}$$

$$= \sqrt{(0.49)^2+\frac{(1)(0)}{(10)}} = 0.49m$$

$$y: \ \delta = \tan^{-1}-\frac{v_\circ}{x_\circ \ _\circ} = \tan^{-1}-0 = 0rad.$$

frecuencia angular: $\omega_\circ^2 = \frac{k}{m} = \frac{10}{1} = 10 \Rightarrow \omega_\circ = \sqrt{10} = 3.1623$ rad/

Período: $T_\circ = \frac{2\pi}{\omega_\circ} = \frac{2\pi}{\sqrt{10}} = 1.9869s.$

b) b = 2.1kg/s; la constante de amortiguamiento es:

$$\gamma = \frac{b}{2m} = \frac{(2.1)}{2(1)} = 1.05rad/s$$

y entonces, la frecuencia angular es:

$$\omega = \sqrt{\omega_\circ^2-\gamma^2} = \sqrt{10-(1.05)^2} = 2.98rad/s$$

$$y: \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\ \pi}{2.98} = 2.11s$$

c) La amplitud decae en el tiempo como:

$$A(t) = Ae^{-\gamma t}; \text{ en } t = 0 \text{ se tiene } A(0) = A_o$$

$$\therefore A(t) = A_o e^{-\gamma t},$$

y después de 3 oscilaciones $(t = 3T)$ tenemos:

$$A(3T) = A_o e^{-3\gamma t} = (0.49)e^{-3(1.05)(2.11)} = 0.00064\,\text{m}.$$

Problema 18:

$$k = 1000\text{N/m};\ T_o = 0.8\text{s}$$

a) La amplitud decae en el tiempo según:

$$A(t) = A_i e^{-\gamma t}$$

si en el tiempo $t = 18$s decae a una octava parte de su valor inicial, entonces:

$$\frac{1}{8}A_i = A_i e^{-18\gamma}$$

despejando γ, se tiene:

$$\gamma = \frac{1}{18}\ln 8 = 0.1155\text{rad/s}$$

y: $$b = 2\gamma m.$$

pero necesitamos conocer la masa del cuerpo que se encuentra oscilando. Puesto que conocemos la constante del resorte y el período de oscilación (armónico simple) entonces,

$$m = \frac{k}{\omega_o^2} = \frac{k}{(2\pi/T_o)^2} = \frac{kT_o^2}{4\pi^2} = \frac{(1000)(0.8)^2}{4\pi^2} = 16.21\,\text{kg}$$

y luego: $b = 2\gamma m = 2(0.1155)(16.21) = 3.7448\,\text{kg/s}$

b) $F_o = 21N$, $T_f = 1.25s$.

frecuencia angular: $\omega_f = \frac{2\pi}{T_f} = \frac{2\pi}{1.25} = 5.0265 rad/s$

$$y: B = \frac{F_o/m}{\sqrt{(\omega_o^2-\omega_f^2)^2+4\gamma^2\omega_f^2}} = \frac{21/16.21}{\sqrt{[(7.8540)^2-(5.0265)^2]^2+4(0.1155)^2(5.0265)^2}}$$

$\Rightarrow B = 0.0374m.$

c) La frecuencia, es la de resonancia:

$$\omega_R = \sqrt{\omega_o^2-\gamma^2} = \sqrt{(7.8540)^2-(0.1155)^2} = 7.8532 \text{ rad/s}$$

y la amplitud:

$$B_{max} = \frac{F_o/m}{\sqrt{(\omega_o^2-\omega_f^2)^2+4\gamma^2\omega_f^2}} = \frac{21/16.21}{\sqrt{[(7.8540)^2-(7.8532)^2]^2+4(0.1155)^2(7.8532)^2}}$$

$\Rightarrow B_{max} = 0.7141m$: con $\omega_f = \omega_R$

Problema 19:

$k = 250N/m$; $M = 50kg$.

a) La frecuencia es:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{250}{50}} = 2.2361 rad/s$$

$$y: T_o = \frac{2\pi}{\omega_o} = \frac{2\pi}{2.2361} = 2.8099s.$$

b) La amplitud decae en el tiempo como:

$$A(t) = A_i e^{-\gamma t}$$

si la amplitud decae a $\frac{1}{4}$ de su velocidad inicial en 5 oscila ciones (5T) entonces $\frac{1}{4}A_i = A_i e^{-5\gamma T}$; donde $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2}}$ es el

período del oscilador amortiguado, despejando γ, se tiene:

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{1+(\frac{10\pi}{\ell n 4})^2}}\ \omega_o = 0.0986 \text{ rad/s}$$

y $b = 2\gamma M = 2(0.986)(50) = 9.86$kg/s

c) La energía inicial es:

$$E_i = \frac{1}{2}M\omega_o^2 A_o^2 e^{-\gamma t_i}$$

y la energía final (después de un tiempo t = 5T) es:

$$E_f = \frac{1}{2}M\omega_o^2 A_o^2 e^{-\gamma(t_i+5T)} = \frac{1}{2}M\omega_o^2 A_o^2 e^{-\gamma t_i}\, e^{-\gamma(5T)}$$

$$\Rightarrow E_f = \frac{1}{2}M\omega_o^2 A_o^2 e^{-\gamma(5T)}$$

donde t_i lo hemos considerado en cero segundos.

Falta por conocer la amplitud A_o del oscilador cuando era no amortiguado, para ello haremos uso de las condiciones inicia les que son:

para $t = 0s$: $V_o = 5m/s$

y $X_o = 0$

$$\Rightarrow \quad A_o = \sqrt{X_o^2+\frac{V_o^2}{\omega_o^2}} = \frac{V_o}{\omega_o} = \frac{5}{2.2361} = 2.236\text{m}.$$

De donde:

$$E_f = \frac{1}{2}(50)(2.2361)^2(2.236)^2 e^{-(0.0986)(5)\frac{2\pi}{\sqrt{(2.2361)^2-(0.0986)^2}}}$$

$$\Rightarrow E_f = 31.2407\text{J}$$

y la energía inicial es:

$$E_i = \frac{1}{2}(50)(2.2361)^2(2.236)^2 = 125.0036\text{J}$$

la pérdida de energía es finalmente:

$$E_f - E_i = -93.7629\text{J}$$

d) $F_o = 150\text{N}$; la frecuencia es la de resonancia:

$$\omega_R = \sqrt{\omega_o^2-2\gamma^2} = \sqrt{(2.2361)^2-2(0.0986)^2} = 2.2317\text{rad/s}$$

y la amplitud correspondiente:

$$B_{max} = \frac{F_o/M}{\sqrt{(\omega_o^2-\omega_f^2)^2+4\gamma^2\omega_f^2}} = \frac{150/50}{\sqrt{[(2.2361)^2-(2.2317)^2]^2+4(0.0986)^2(2.2317)^2}}$$

$$\Rightarrow B_{max} = 6.8101\text{m}.$$

Problemario de dinámica

Se terminó de imprimir
en el mes de septiembre del año 2003
en los talleres de la Sección
de Impresión y Reproducción de la
Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco

La edición estuvo a cargo
de la Sección de Producción
y Distribución Editoriales

Se imprimieron 200 ejemplares
más sobrantes para reposición.

PROBLEMARIO DE DINAMICA

ROCHA

35347 $ 17.00

ISBN: 970-654-581-6

978-97065-45817

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA Azcapotzalco

Division de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Ciencias Básicas

Coordinación de Extensión Universitaria
Sección de Producción y Distribución Editoriales